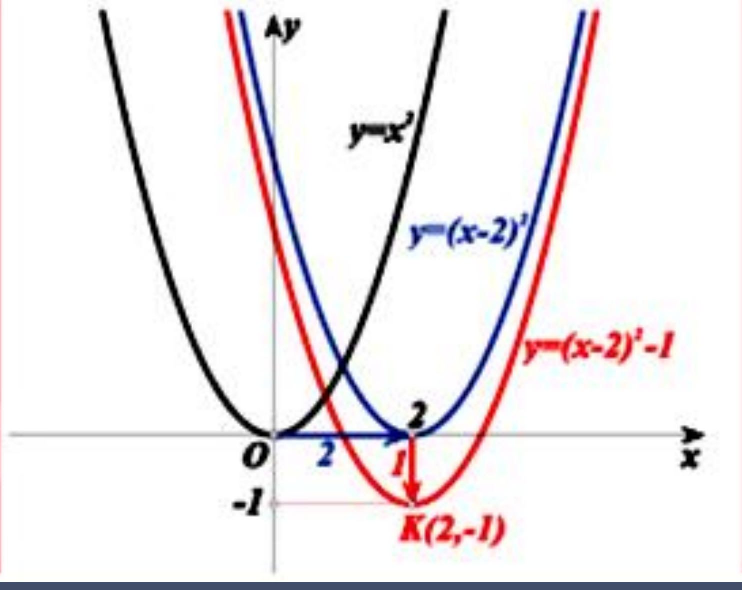
ΑΛΓΕΒΡΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

Α΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

Μεθοδική Επανάληψη



www.askisopolis.gr

Στέλιος Μιχαήλογλου - Δημήτρης Πατσιμάς

1. Σύνολα

1. Τι είναι το σύνολο;

Σύνολο είναι κάθε συλλογή αντικειμένων, που προέρχονται από την εμπειρία μας ή τη διανόησή μας, είναι καλά ορισμένα και διακρίνονται το ένα από το άλλο. Τα αντικείμενα που αποτελούν το σύνολο ονομάζονται στοιχεία ή μέλη του συνόλου. Τα σύνολα συνήθως τα συμβολίζουμε με κεφαλαία γράμματα του Ελληνικού ή Λατινικού αλφαβήτου.

2. Ποιοι είναι οι βασικοί τρόποι παράστασης συνόλων και τι γνωρίζετε γι αυτούς;

Τα σύνολα παριστάνονται με αναγραφή ή περιγραφή.

- Παράσταση με **αναγραφή** έχουμε μεταξύ δύο αγκίστρων όλα τα στοιχεία αναλυτικά τα στοιχεία του συνόλου. Για παράδειγμα το σύνολο Α που περιέχει τους αριθμούς 0,1,2,3,4,5 γράφεται: $A=\{0,1,2,3,4,5\}$.
  Ο τρόπος αυτός χρησιμοποιείται συνήθως όταν τα στοιχεία του συνόλου είναι σχετικά λίγα.
- Παράσταση με **περιγραφή** έχουμε όταν από ένα σύνολο Ω επιλέγουμε εκείνα τα στοιχεία του, που έχουν μια ορισμένη ιδιότητα. Για παράδειγμα το σύνολο Β των ακεραίων από το 1 έως το 100, γράφεται: $B=\{x\in\mathbb{Z} / 1\le x\le 100\}$

3. Πότε δύο σύνολα είναι ίσα;

Δύο σύνολα Α και Β λέγονται ίσα, όταν έχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία. Γράφουμε $\mathbf{A=B}$.

4. Πότε ένα σύνολο Α λέγεται υποσύνολο ενός συνόλου Β;

Ένα σύνολο Α λέγεται υποσύνολο ενός συνόλου Β όταν κάθε στοιχείο του Α είναι και στοιχείο του Β. Γράφουμε $\mathbf{A\subseteq B}$.

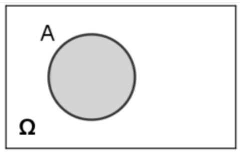
5. Ποιο σύνολο λέγεται κενό;

Ένα σύνολο που δεν έχει στοιχεία, λέγεται κενό σύνολο και συμβολίζεται με $\{\ \}$ ή $\varnothing$. Για παράδειγμα το σύνολο $A=\{x\in\mathbb{R} / x^2=-1\}$. Επειδή η εξίσωση $x^2=-1$ είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$, το Α δεν έχει κανένα στοιχείο, άρα $A=\varnothing$.

Το κενό σύνολο είναι υποσύνολο οποιουδήποτε συνόλου Α, δηλαδή $\varnothing\subseteq A$.

6. Τι είναι τα διαγράμματα Venn;

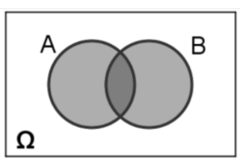
Τα διαγράμματα Venn είναι μία εποπτική παρουσίαση των συνόλων και των μεταξύ τους σχέσεων. Το βασικό σύνολο Ω συμβολίζεται με το εσωτερικό ενός ορθογωνίου. Κάθε υποσύνολο του βασικού συνόλου παριστάνεται με το εσωτερικό μιας κλειστής καμπύλης.



Πράξεις συνόλων

7. Ποιο σύνολο λέγεται ένωση δύο συνόλων Α,Β;

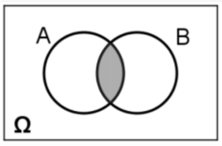
Ένωση δύο συνόλων Α και Β λέγεται το σύνολο του οποίου τα στοιχεία ανήκουν σε ένα τουλάχιστον από τα σύνολα Α και Β.
Συμβολίζεται με $A\cup B$.
Δηλαδή $A\cup B=\{x\in\Omega / x\in A \text{ ή } x\in B\}$.



8. Ποιο σύνολο λέγεται τομή των συνόλων Α,Β;

Τομή δύο συνόλων Α και Β λέγεται το σύνολο του οποίου τα στοιχεία ανήκουν ταυτόχρονα και στα δύο σύνολα Α και Β. Δηλαδή στην τομή των Α και Β ανήκουν τα κοινά τους στοιχεία. Συμβολίζεται με $A \cap B$.

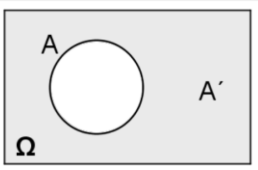
Δηλαδή $A \cap B = \{x \in \Omega / x \in A \text{ και } x \in B\}$



9. Ποιο σύνολο λέγεται συμπλήρωμα ενός υποσυνόλου Α ενός βασικού συνόλου Ω;

Συμπλήρωμα ενός συνόλου Α λέγεται το σύνολο που περιέχει τα στοιχεία του Ω που δεν ανήκουν στο Α. Συμβολίζεται με **Α΄**.

Δηλαδή $A' = \{x \in \Omega / x \notin A\}$



Βασικές ασκήσεις

1. Να γράψετε με αναγραφή τα σύνολα:
α) $A = \{x \in \mathbb{N} / -2 \le x \le 5\}$ **β)** $B = \{x \in \mathbb{Z} / (x-1)(x-3)(2x-5) = 0\}$

2. Να βρείτε το σύνολο των ψηφίων που αποτελούν τον αριθμό 352253.

3. Να εξετάσετε αν είναι ίσα τα σύνολα $A = \{-2,-1,0,1,2,3\}$ και $B = \{x \in \mathbb{Z} / -3 < x \le 3\}$.

4. Αν $A = \{2,4\}$, $B = \{1,2,3\}$ και $\Gamma = \{1,2,3,4\}$, να εξετάσετε ποιοι από τους παρακάτω ισχυρισμούς είναι σωστοί: **α)** $A \subseteq B$ **β)** $A \subseteq \Gamma$ **γ)** $B \subseteq \Gamma$

2. Πραγματικοί αριθμοί

α. Οι πράξεις και οι ιδιότητες τους

10. Ποιος αριθμός ονομάζεται ρητός και ποιος άρρητος;

Ρητός είναι κάθε αριθμός που μπορεί να γραφεί στη μορφή $\frac{\alpha}{\beta}$, όπου οι α και β είναι ακέραιοι με $\beta \ne 0$.

Οι αριθμοί που δεν γράφονται στη μορφή $\frac{\alpha}{\beta}$, όπου οι α και β είναι ακέραιοι με $\beta \ne 0$, λέγονται **άρρητοι** αριθμοί.

11. Ποιες είναι οι ιδιότητες της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού πραγματικών αριθμών;

Ιδιότητα	**Πρόσθεση**	**Πολλαπλασιασμός**
Αντιμεταθετική	$\alpha+\beta=\beta+\alpha$	$\alpha\cdot\beta=\beta\cdot\alpha$
Προσεταιριστική	$\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$	$\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)=(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma$
Ουδέτερο στοιχείο	$\alpha+0=\alpha$	$\alpha\cdot 1=\alpha$
Συμμετρικό στοιχείο (αντίθετος-αντίστροφος)	$\alpha+(-\alpha)=0$	$\alpha\cdot\frac{1}{\alpha}=1,\ \alpha\ne 0$
Επιμεριστική	$\alpha\cdot(\beta+\gamma)=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma$	

12.Τι ονομάζεται δύναμη α^{ν} με βάση τον πραγματικό αριθμό α και εκθέτη τον φυσικό αριθμό $\nu>1$;

Δύναμη α^{ν} με βάση τον πραγματικό αριθμό α και εκθέτη τον φυσικό αριθμό $\nu>1$, είναι το γινόμενο ν παραγόντων ίσων με το α. Δηλαδή: $\boldsymbol{\alpha^{\nu}=\underbrace{\alpha\cdot\alpha\cdot\ldots\cdot\alpha}_{\nu\ \text{παράγοντες}}}$

Ακόμη ορίζουμε ότι: $\boldsymbol{\alpha^1=\alpha}$ και με $\boldsymbol{\alpha\neq 0}$: $\boldsymbol{\alpha^0=1}$ **και** $\boldsymbol{\alpha^{-\nu}=\dfrac{1}{\alpha^{\nu}}}$.

13.Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ιδιότητες δυνάμεων:

$\alpha^{\kappa}\cdot\alpha^{\lambda}=\ldots\ldots\ldots$ $\quad\alpha^{\kappa}:\alpha^{\lambda}=\ldots\ldots\ldots$ $\quad\alpha^{\kappa}\cdot\beta^{\kappa}=\ldots\ldots\ldots$ $\quad\dfrac{\alpha^{\kappa}}{\beta^{\kappa}}=\ldots\ldots\ldots$ $\quad\left(\alpha^{\kappa}\right)^{\lambda}=\ldots\ldots\ldots$

$\alpha^{\kappa}\cdot\alpha^{\lambda}=\alpha^{\kappa+\lambda}$, $\quad\alpha^{\kappa}\cdot\beta^{\kappa}=(\alpha\cdot\beta)^{\kappa}$, $\quad\dfrac{\alpha^{\kappa}}{\alpha^{\lambda}}=\alpha^{\kappa-\lambda}$, $\quad\dfrac{\alpha^{\kappa}}{\beta^{\kappa}}=\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{\kappa}$, $\left(\alpha^{\kappa}\right)^{\lambda}=\alpha^{\kappa\cdot\lambda}$

14.Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ταυτότητες:

$(\alpha+\beta)^2=\ldots$ $\quad(\alpha-\beta)^2=\ldots$ $\quad\alpha^2-\beta^2=\ldots$ $\quad(\alpha+\beta)^3=\ldots$

$(\alpha-\beta)^3=\ldots$ $\quad\alpha^3+\beta^3=\ldots$ $\quad\alpha^3-\beta^3=\ldots$ $\quad(\alpha+\beta+\gamma)^2=\ldots$

$(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$ $\quad(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$ $\quad\alpha^2-\beta^2=(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$

$(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$ $\quad(\alpha-\beta)^3=\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3$

$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$ $\quad\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$

$(\alpha+\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\alpha\gamma+2\beta\gamma$

15.Να γράψετε τις ιδιότητες των αναλογιών που απορρέουν από την ισότητα $\boldsymbol{\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\gamma}{\delta},\ \beta\delta(\beta+\delta)\neq 0}$.

i. $\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\gamma}{\delta}\Leftrightarrow\alpha\delta=\beta\gamma,\ \beta\delta\neq 0$

ii. $\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\gamma}{\delta}\Leftrightarrow\dfrac{\alpha}{\gamma}=\dfrac{\beta}{\delta},\ \beta\gamma\delta\neq 0$

iii. $\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\gamma}{\delta}\Leftrightarrow\dfrac{\alpha+\beta}{\beta}=\dfrac{\gamma+\delta}{\delta}$, $\beta\delta\neq 0$

iv. $\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\gamma}{\delta}\Leftrightarrow\dfrac{\alpha}{\beta+\alpha}=\dfrac{\gamma}{\delta+\gamma}$, $\quad\beta\delta(\beta+\alpha)(\delta+\gamma)\neq 0$

v. Αν $\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\gamma}{\delta}$ τότε $\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\gamma}{\delta}=\dfrac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$, $\beta\delta(\beta+\delta)\neq 0$

Βασικές ασκήσεις

5. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις: **α)** $\dfrac{\alpha^3-2\alpha^2+\alpha}{\alpha^2-\alpha}$ **β)** $\left(\alpha-\dfrac{1}{\alpha}\right)^2\cdot\dfrac{\alpha^3+\alpha^2}{(\alpha+1)^2}$

6. Να αποδείξετε ότι: $\left(\dfrac{x^3+y^3}{x^2-y^2}\right):\left(\dfrac{x^2}{x-y}-y\right)=1$

7. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β, γ, δ με $\beta\neq 0$ και $\delta\neq\gamma$ ώστε να ισχύουν: $\dfrac{\alpha+\beta}{\beta}=4$ και $\dfrac{\gamma}{\delta-\gamma}=\dfrac{1}{4}$

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 3\beta$ και $\delta = 5\gamma$.

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης: $\Pi = \dfrac{\alpha\gamma + \beta\gamma}{\beta\delta - \beta\gamma}$

8. **α)** Να αποδείξετε ότι $\alpha^2 - (\alpha - 1)(\alpha + 1) = 1$.

β) Να υπολογίσετε τη τιμή της παράστασης $(1,3265)^2 - 0,3265 \cdot 2,3265$

9. Δίνονται οι μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί α, β, με $\alpha \neq \beta$ για τους οποίους ισχύει: $\dfrac{\alpha^2 + 1}{\beta^2 + 1} = \dfrac{\alpha}{\beta}$.

α) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α και β είναι αντίστροφοι.

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $K = \dfrac{\alpha^{22} \cdot (\beta^3)^8}{\alpha^{-2} \cdot (\alpha\beta)^{25}}$.

β. Διάταξη πραγματικών αριθμών

16. Πότε ένας αριθμός α είναι μεγαλύτερος από έναν αριθμό β;

Ένας αριθμός α λέμε ότι είναι μεγαλύτερος από έναν αριθμό β, και γράφουμε $\boldsymbol{\alpha > \beta}$, όταν η διαφορά $\boldsymbol{\alpha - \beta}$ είναι θετικός αριθμός. Δηλαδή $\boldsymbol{\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta > 0}$.

17. Αν δύο αριθμοί α, β είναι ομόσημοι τότε τι συμπεραίνετε για το άθροισμα, το γινόμενο και το πηλίκο τους;

Το άθροισμα δύο θετικών αριθμών είναι θετικός αριθμός και το άθροισμα δύο αρνητικών αριθμών είναι αρνητικός αριθμός. Το γινόμενο και το πηλίκο δύο ομόσημων αριθμών είναι θετικός αριθμός.

18. Αν δύο αριθμοί α, β είναι ετερόσημοι τότε τι συμπεραίνετε για το γινόμενο και το πηλίκο τους;

Το γινόμενο και το πηλίκο δύο ετερόσημων αριθμών είναι αρνητικός αριθμός.

19. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω σχέσεις:

$\boldsymbol{\alpha^2 ....0}$ $\quad\quad$ $\boldsymbol{\alpha^2 + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow}$ **......................** $\quad\quad$ $\boldsymbol{\alpha^2 + \beta^2 > 0 \Leftrightarrow}$ **.............**

$\alpha^2 \geq 0$, $\quad$ $\alpha^2 + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0$ και $\alpha^2 + \beta^2 > 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ ή $\beta = 0$

20. Να αποδείξετε ότι για θετικούς αριθμούς α,β και θετικό ακέραιο ν ισχύει η ισοδυναμία:
$\boldsymbol{\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha^\nu = \beta^\nu}$

Ευθύ: Έστω $\alpha = \beta$. Τότε από τον ορισμό της ισότητας προκύπτει ότι $\alpha^\nu = \beta^\nu$.

Αντίστροφο: Έστω ότι $\alpha^\nu = \beta^\nu$ και $\alpha \neq \beta$, τότε:

Αν $\alpha > \beta$ θα είναι $\alpha^\nu > \beta^\nu$ άτοπο και

αν $\alpha < \beta$ θα είναι $\alpha^\nu < \beta^\nu$ που είναι επίσης άτοπο. Άρα $\alpha = \beta$.

21. Τι ονομάζεται κλειστό και τι ανοικτό διάστημα από το α μέχρι το β και πως συμβολίζεται;

Κλειστό διάστημα από το α μέχρι το β λέγεται το σύνολο των πραγματικών αριθμών x με $\alpha \le x \le \beta$ και συμβολίζεται με $[\alpha,\beta]$.
Ανοικτό διάστημα από το α μέχρι το β λέγεται το σύνολο των πραγματικών αριθμών x με $\alpha < x < \beta$ και συμβολίζεται με (α,β).

Βασικές ασκήσεις

10. Αν $0<\alpha<1$, τότε

α) να αποδείξετε ότι: $\alpha^3<\alpha$.

β) να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους αριθμούς: $0,\alpha^3,1,\alpha,\frac{1}{\alpha}$.

11. Αν $\alpha>1>\beta$, να αποδείξετε ότι: $\alpha+\beta>1+\alpha\beta$.

12. Δίνονται πραγματικοί αριθμοί α, β, με $\alpha>0$ και $\beta>0$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha+\frac{4}{\alpha}\ge 4$ **β)** $\left(\alpha+\frac{4}{\alpha}\right)\cdot\left(\beta+\frac{4}{\beta}\right)\ge 16$

13. Δίνονται οι παραστάσεις: $K=2\alpha^2+\beta^2+9$ και $\Lambda=2\alpha(3-\beta)$, όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι: $K-\Lambda=\left(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2\right)+\left(\alpha^2-6\alpha+9\right)$

β) Να δείξετε ότι: $K\ge\Lambda$, για κάθε τιμή των $\alpha,\ \beta$.

γ) Για ποιες τιμές των $\alpha,\ \beta$ ισχύει η ισότητα $K=\Lambda$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

14. α) Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει:

$$(x-1)^2+(y+3)^2=x^2+y^2-2x+6y+10$$

β) Να βρείτε τους αριθμούς x, y ώστε: $x^2+y^2-2x+6y+10=0$

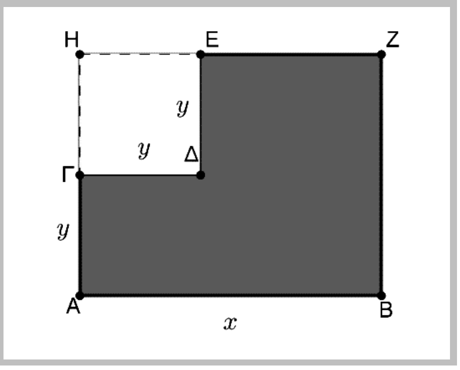
15. Αν $2\le x\le 3$ και $1\le y\le 2$, να βρείτε μεταξύ ποιων ορίων βρίσκεται η τιμή καθεμιάς από τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $x+y$ **β)** $2x-3y$ **γ)** $\frac{x}{y}$

16. Από το ορθογώνιο ΑΒΖΗ αφαιρέθηκε το τετράγωνο ΓΔΕΗ πλευράς y.

α) Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του γραμμοσκιασμένου σχήματος ΕΖΒΑΓΔ που απέμεινε δίνεται από τη σχέση: Π = 2x + 4y

β) Αν ισχύει $5<x<8$ και $1<y<2$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η τιμή της περιμέτρου του παραπάνω γραμμοσκιασμένου σχήματος.



γ. Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού

22. Τι ονομάζεται απόλυτη τιμή του πραγματικού αριθμού α;

Η απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού α συμβολίζεται με $|\alpha|$ και ορίζεται από τον τύπο:

$$|\alpha|=\begin{cases}\alpha, & \alpha\ge 0\\ -\alpha, & \alpha<0\end{cases}$$

23. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω σχέσεις με τα σύμβολα >, < , =, ≥, ≤ :

$|\alpha|\ldots|-\alpha|\ldots 0$ $\qquad$ $|\alpha|\ldots\alpha$ **και** $|\alpha|\ldots-\alpha$ $\qquad$ $|\alpha|^2\ldots\alpha^2$

Είναι $|\alpha|=|-\alpha|\ge 0$, $\quad |\alpha|\ge\alpha$ και $|\alpha|\ge-\alpha$, $\quad |\alpha|^2=\alpha^2$

24. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω σχέσεις
Αν $\theta>0$, τότε $|x|=\theta\Leftrightarrow$ .... και $|x|=|\alpha|\Leftrightarrow$ ....

Είναι $|x|=\theta\Leftrightarrow x=\pm\theta$ και $|x|=|\alpha|\Leftrightarrow x=\pm\alpha$

25. Να αποδείξετε ότι: α) $|\alpha\cdot\beta|=|\alpha|\cdot|\beta|$ $\qquad$ β) $\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right|=\dfrac{|\alpha|}{|\beta|}$

α) Επειδή και τα δύο μέλη της ισότητας $|\alpha\cdot\beta|=|\alpha|\cdot|\beta|$ είναι μη αρνητικοί αριθμοί, έχουμε:

$$|\alpha\cdot\beta|=|\alpha|\cdot|\beta|\Leftrightarrow|\alpha\cdot\beta|^2=\left(|\alpha|\cdot|\beta|\right)^2\Leftrightarrow(\alpha\cdot\beta)^2=|\alpha|^2\cdot|\beta|^2\Leftrightarrow\alpha^2\cdot\beta^2=\alpha^2\cdot\beta^2 \text{ ισχύει}$$

β) Αποδεικνύεται με όμοιο τρόπο.

26. Να αποδείξετε ότι: $|\alpha+\beta|\le|\alpha|+|\beta|$. Πότε ισχύει η ισότητα;

Επειδή και τα δύο μέλη της σχέσης $|\alpha+\beta|\le|\alpha|+|\beta|$ είναι μη αρνητικοί αριθμοί, έχουμε:

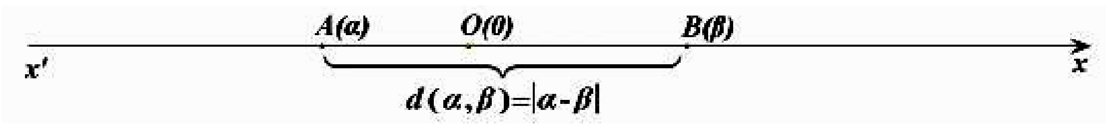
$$|\alpha+\beta|\le|\alpha|+|\beta|\Leftrightarrow|\alpha+\beta|^2\le\left(|\alpha|+|\beta|\right)^2\Leftrightarrow(\alpha+\beta)^2\le|\alpha|^2+2|\alpha||\beta|+|\beta|^2\Leftrightarrow$$

$$\cancel{\alpha^2}+2\alpha\beta+\cancel{\beta^2}\le\cancel{\alpha^2}+2|\alpha\beta|+\cancel{\beta^2}\Leftrightarrow\cancel{2}\alpha\beta\le\cancel{2}|\alpha\beta|\Leftrightarrow|\alpha\beta|\ge\alpha\beta \text{ που ισχύει.}$$

Η ισότητα $|\alpha\beta|=\alpha\beta$ ισχύει μόνο αν $\alpha\beta\ge 0$, δηλαδή αν και μόνο αν οι αριθμοί α,β είναι ομόσημοι ή ένας τουλάχιστον από αυτούς είναι ίσος με μηδέν.

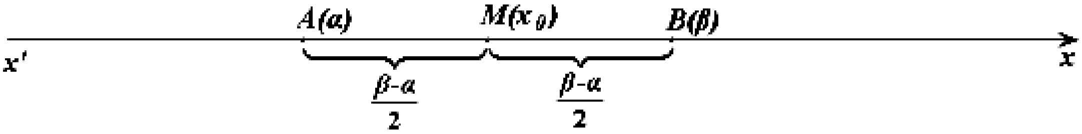
27. Τι ονομάζεται απόσταση δύο αριθμών α,β, πως συμβολίζεται και με τι είναι ίση;

Έστω ότι οι αριθμοί α,β παριστάνονται πάνω στον άξονα με τα σημεία A και B.



Το μήκος του τμήματος AB λέγεται απόσταση των αριθμών α και β, συμβολίζεται με d(α,β) και είναι ίση με $|\alpha-\beta|$. Δηλαδή $\mathbf{d(\alpha,\beta)=|\alpha-\beta|}$.

28.Έστω ότι τα σημεία Α και Β παριστάνουν στον άξονα τα άκρα α,β του διαστήματος $[\alpha,\beta]$.
Αν $M(x_0)$ το μέσο ΑΒ, να αποδείξετε ότι $x_0=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$.



Είναι $(MA)=(MB)\Leftrightarrow d(x_0,\alpha)=d(x_0,\beta)\Leftrightarrow |x_0-\alpha|=|x_0-\beta|\Leftrightarrow x_0-\alpha=\beta-x_0$ (αφού $\alpha<x_0<\beta$) $\Leftrightarrow$
$2x_0=\alpha+\beta\Leftrightarrow x_0=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$.

29.Να συμπληρώσετε τις παρακάτω σχέσεις:
Για $x_0\in\mathbb{R}$, $\rho>0$ ισχύει: $|x-x_0|<\rho\Leftrightarrow$ .... και $|x|<\rho\Leftrightarrow$ ....
Για $x_0\in\mathbb{R}$, $\rho>0$ ισχύει: $|x-x_0|>\rho\Leftrightarrow$ .... και $|x|>\rho\Leftrightarrow$ ....

Είναι $|x-x_0|<\rho\Leftrightarrow x\in(x_0-\rho,x_0+\rho)\Leftrightarrow x_0-\rho<x<x_0+\rho$
$|x|<\rho\Leftrightarrow x\in(-\rho,\rho)\Leftrightarrow -\rho<x<\rho$
$|x-x_0|>\rho\Leftrightarrow x\in(-\infty,x_0-\rho)\cup(x_0+\rho,+\infty)\Leftrightarrow x<x_0-\rho$ ή $x>x_0+\rho$
$|x|>\rho\Leftrightarrow x\in(-\infty,-\rho)\cup(\rho,+\infty)\Leftrightarrow x<-\rho$ ή $x>\rho$.

Βασικές ασκήσεις

17.Να γράψετε χωρίς την απόλυτη τιμή την παράσταση $|x-3|+|x-4|$, όταν:
α) $x<3$ **β)** $x>4$ **γ)** $x\in\mathbb{R}$

18.Αν ο πραγματικός αριθμός x ικανοποιεί τη σχέση: $|x+1|<2$,
α) να δείξετε ότι $x\in(-3,1)$.
β) να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης: $K=\dfrac{|x+3|+|x-1|}{4}$ είναι αριθμός ανεξάρτητος του x.

19.Για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει: $d(2x,3)=3-2x$
α) Να αποδείξετε ότι $x\le\dfrac{3}{2}$.
β) Αν $x\le\dfrac{3}{2}$, να αποδείξετε ότι η παράσταση: $K=|2x-3|-2|3-x|$ είναι ανεξάρτητη του x.

20.α) Αν $\alpha<0$, να αποδειχθεί ότι: $\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\le-2$
β) Αν $\alpha<0$, να αποδειχθεί ότι: $|\alpha|+\left|\dfrac{1}{\alpha}\right|\ge 2$

21.Αν $\alpha>\beta$, να δείξετε ότι: **α)** $\alpha=\dfrac{\alpha+\beta+|\alpha-\beta|}{2}$ **β)** $\beta=\dfrac{\alpha+\beta-|\alpha-\beta|}{2}$

22.Τι σημαίνει για τους αριθμούς x και y:
α) η ισότητα $|x|+|y|=0$ **β)** η ανισότητα $|x|+|y|>0$;

23. Να αποδείξετε ότι $|\alpha-\beta| \le |\alpha-\gamma|+|\gamma-\beta|$.

24.α) Να βρείτε για ποιες πραγματικές τιμές του y ισχύει : $|y-3|<1$.

β) Αν x, y είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, με $1<x<3$ και $2<y<4$, τότε να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή του εμβαδού Ε του ορθογωνίου.

25. Αν $|x|<3$ και $|y|<2$, να αποδείξετε ότι:

α) $|2x-3y|<12$ **β)** $|3x-y+1|<12$

26. Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός x που ικανοποιεί τη σχέση: $d(x,5)\le 9$.

α) Να αποδώσετε την παραπάνω σχέση λεκτικά.

β) Με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών, να παραστήσετε σε μορφή διαστήματος το σύνολο των δυνατών τιμών του x.

γ) Να γράψετε τη σχέση με το σύμβολο της απόλυτης τιμής και να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό τρόπο το συμπέρασμα του ερωτήματος (β).

δ) Να χρησιμοποιήσετε το συμπέρασμα του ερωτήματος (γ) για να δείξετε ότι: $|x+4|+|x-14|=18$.

27. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α και β για τους οποίους ισχύει η ανίσωση: $(\alpha-1)(1-\beta)>0$.

α) Να αποδείξετε ότι το 1 είναι μεταξύ των α, β.

β) Αν επιπλέον $|\beta-\alpha|=4$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$K=|\alpha-1|+|1-\beta|$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας είτε γεωμετρικά είτε αλγεβρικά.

δ. Ρίζες πραγματικών αριθμών

30. Τι ονομάζεται τετραγωνική ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού α;

Η τετραγωνική ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού α συμβολίζεται με $\sqrt{\alpha}$ και είναι ο μη αρνητικός αριθμός που, όταν υψωθεί στο τετράγωνο, δίνει τον α.

Δηλαδή αν $\alpha\ge 0$, η $\sqrt{\alpha}$ παριστάνει τη μη αρνητική λύση της εξίσωσης $x^2=\alpha$.

31. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες:

$\sqrt{\alpha^2}=$ .... , $\left(\sqrt{\alpha}\right)^2=$ ...., $\alpha\ge 0$, $\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}=$ ...., $\alpha,\beta\ge 0$, $\dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}=$ .... , $\alpha\ge 0, \beta>0$

$\sqrt{\alpha^2}=|\alpha|$, $\left(\sqrt{\alpha}\right)^2=\alpha$, $\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}=\sqrt{\alpha\beta}$, $\dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}=\sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}$

32. Τι ονομάζεται ν– οστή ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού α;

Η ν-οστή ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού α συμβολίζεται με $\sqrt[\nu]{\alpha}$ και είναι ο μη αρνητικός αριθμός που όταν υψωθεί στην ν, δίνει το α.

Δηλαδή αν $\alpha\ge 0$, η $\sqrt[\nu]{\alpha}$ παριστάνει τη μη αρνητική λύση της εξίσωσης $x^\nu=\alpha$.

33.Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες:

$\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^{\nu} = ..., \alpha \geq 0$ $\qquad \sqrt[\nu]{\alpha^{\nu}} = ..., \alpha \geq 0$ $\qquad \sqrt[\nu]{\alpha^{\nu}} = ..., \alpha \leq 0$ **και ν άρτιος**

$\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^{\nu} = \alpha,\ \alpha \geq 0$, $\qquad \sqrt[\nu]{\alpha^{\nu}} = \alpha,\ \alpha \geq 0$, $\qquad \sqrt[\nu]{\alpha^{\nu}} = |\alpha|,\ \alpha \leq 0$ και ν άρτιος

34.Αν $\alpha, \beta \geq 0$ να αποδείξετε ότι:

i. $\sqrt[\nu]{\alpha} \cdot \sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha \cdot \beta}$ $\qquad$ **ii.** $\dfrac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}} = \sqrt[\nu]{\dfrac{\alpha}{\beta}},\ \beta \neq 0$

iii. $\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}} = \sqrt[\mu\nu]{\alpha}$ $\qquad$ **iv.** $\sqrt[\nu\rho]{\alpha^{\mu\rho}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$

i. $\sqrt[\nu]{\alpha} \cdot \sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha \cdot \beta} \Leftrightarrow \left(\sqrt[\nu]{\alpha} \cdot \sqrt[\nu]{\beta}\right)^{\nu} = \left(\sqrt[\nu]{\alpha \cdot \beta}\right)^{\nu} \Leftrightarrow \left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^{\nu} \cdot \left(\sqrt[\nu]{\beta}\right)^{\nu} = \alpha \cdot \beta \Leftrightarrow \alpha \cdot \beta = \alpha \cdot \beta$ ισχύει

ii. Αποδεικνύεται όπως και το i.

iii. $\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}} = \sqrt[\mu\nu]{\alpha} \Leftrightarrow \left(\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}}\right)^{\mu\nu} = \left(\sqrt[\mu\nu]{\alpha}\right)^{\mu\nu} \Leftrightarrow \left[\left(\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}}\right)^{\mu}\right]^{\nu} = \alpha \Leftrightarrow \left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^{\nu} = \alpha$ ισχύει

iv. $\sqrt[\nu\rho]{\alpha^{\mu\rho}} = \sqrt[\nu]{\sqrt[\rho]{\alpha^{\mu\rho}}} = \sqrt[\nu]{\sqrt[\rho]{\left(\alpha^{\mu}\right)^{\rho}}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$

35. Πως ορίζεται η δύναμη του μη αρνητικού αριθμού α σε ρητό εκθέτη;

Αν $\alpha > 0$, μ ακέραιος και ν θετικός ακέραιος, τότε $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$

Αν $\alpha = 0$, μ,ν θετικοί ακέραιοι, τότε ορίζουμε $0^{\frac{\mu}{\nu}} = 0$.

Βασικές ασκήσεις

28.Να αποδείξετε ότι: $\sqrt{\left(1+\sqrt{3}\right)^2} - \sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2} = 2$.

29.Να αποδείξετε ότι:

α) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2}} = 2$ $\qquad$ **β)** $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{3+\sqrt{5}} \cdot \sqrt[3]{3-\sqrt{5}} = 2$

30.Να αποδείξετε ότι:

α) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} - \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = 4$ $\qquad$ **β)** $\dfrac{1}{\left(2-\sqrt{3}\right)^2} - \dfrac{1}{\left(2+\sqrt{3}\right)^2} = 8\sqrt{3}$

31.Να αποδείξετε ότι:

α) $\dfrac{\sqrt{50}+\sqrt{72}}{\sqrt{128}-\sqrt{98}} = 11$ $\qquad$ **β)** $\sqrt{8} - 2\sqrt{32} + \sqrt{18} + 2\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ $\qquad$ **γ)** $\sqrt[10]{\dfrac{2^{600}+8^{190}}{4^{290}+32^{110}}} = 4$

32.Να αποδείξετε ότι:

α) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[4]{8} = 2\sqrt[12]{2^{11}}$ $\qquad$ **β)** $\sqrt[5]{9} \cdot \sqrt[3]{3} = 27\sqrt[3]{9}$ $\qquad$ **γ)** $\sqrt[10]{2\sqrt{2\sqrt[3]{2}}} = \sqrt[6]{2}$

33.Να τραπούν τα παρακάτω κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή:

α) $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ **β)** $\dfrac{4}{\sqrt[4]{8}}$ **γ)** $\dfrac{1}{\sqrt[7]{2^3}}$ **δ)** $\dfrac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

34. Να αποδείξετε ότι:

α) $\sqrt[5]{5}<\sqrt[3]{3}$ **β)** $\sqrt{7}+\sqrt{3}<\sqrt{21}+1$ **γ)** $\sqrt{8-2\sqrt{10}}>\sqrt{5}-\sqrt{2}$

35. Αν είναι $A=\sqrt[3]{5}, B=\sqrt{3}$ και $\Gamma=\sqrt[6]{5}$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $A\cdot B\cdot \Gamma=\sqrt{15}$.

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς Α, Β .

36. Δίνονται οι αριθμοί: $A=(\sqrt{2})^6$ και $B=(\sqrt[3]{2})^6$

α) Να δείξετε ότι: $A-B=4$

β) Να διατάξετε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους αριθμούς: $\sqrt{2}, 1, \sqrt[3]{2}$.

37.α) Να δείξετε ότι : $3<\sqrt[3]{30}<4$.

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt[3]{30},\ 6-\sqrt[3]{30}$.

38. Δίνεται η παράσταση: $A=\left(\sqrt{x-4}+\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x-4}-\sqrt{x+1}\right)$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Α; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Να αποδείξετε ότι η παράσταση Α είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x.

39. Δίνονται οι παραστάσεις: $A=\sqrt{(x-2)^2}$ και $B=\sqrt[3]{(2-x)^3}$ όπου x πραγματικός αριθμός

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Α;

β) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Β;

γ) Να δείξετε ότι, για κάθε $x\le 2$, ισχύει $A=B$.

3. Εξισώσεις

α. Εξισώσεις 1ου Βαθμού

36. Να λύσετε την εξίσωση $\alpha x+\beta=0$ για τις διαφορετικές τιμές των $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

Είναι: $\alpha x+\beta=0 \Leftrightarrow \alpha x=-\beta$

- Αν $\alpha\neq 0$, τότε: $\alpha x=-\beta \Leftrightarrow \dfrac{\cancel{\alpha}x}{\cancel{\alpha}}=-\dfrac{\beta}{\alpha}\Leftrightarrow x=-\dfrac{\beta}{\alpha}$.
- Αν $\alpha=0$, τότε η εξίσωση $\alpha x=-\beta$ γίνεται $0\cdot x=-\beta$

- αν $\beta\neq 0$ η εξίσωση είναι αδύνατη, ενώ
- αν $\beta=0$ η εξίσωση έχει τη μορφή $0\cdot x=0$ και αληθεύει για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού x, δηλαδή είναι ταυτότητα.

37. Ποιος αριθμός λέγεται ρίζα μιας εξίσωσης;

Η λύση μιας εξίσωσης λέγεται και ρίζα της.

38. Πότε μια εξίσωση 1ου βαθμού λέγεται παραμετρική και πως ονομάζεται η διαδικασία που κάνουμε για την εύρεση του πλήθους των ριζών της;

Αν οι συντελεστές α και β της εξίσωσης $\alpha x+\beta=0$ εκφράζονται με τη βοήθεια γραμμάτων τότε τα γράμματα αυτά λέγονται **παράμετροι**, η εξίσωση λέγεται **παραμετρική** και η εργασία που κάνουμε για την εύρεση του πλήθους των ριζών της λέγεται **διερεύνηση.**

Βασικές ασκήσεις

40. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\frac{1-4x}{5}-\frac{x+1}{4}=\frac{x-4}{20}+\frac{5}{4}$ **β)** $2(3x-1)-3(2x-1)=4$

γ) $x^2(x-4)+2x(x-4)+(x-4)=0$ **δ)** $x(x-2)^2=x^2-4x+4$

ε) $x^3-2x^2-x+2=0$ **στ)** $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}=\frac{2}{x^2-1}$

41. Δίνεται η εξίσωση $\lambda\cdot x=x+\lambda^2-1$, με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση γράφεται ισοδύναμα: $(\lambda-1)x=(\lambda-1)(\lambda+1)$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

β) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η παραπάνω εξίσωση έχει ακριβώς μία λύση την οποία και να βρείτε.

γ) Για ποια τιμή του λ η παραπάνω εξίσωση είναι ταυτότητα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

42. Δίνεται η εξίσωση: $(\alpha+3)x=\alpha^2-9$, με παράμετρο $\alpha\in\mathbb{R}$.

α) Να λύσετε την εξίσωση στις παρακάτω περιπτώσεις:

i) όταν $\alpha=1$ ii) όταν $\alpha=-3$

β) Να βρείτε τις τιμές του α, για τις οποίες η εξίσωση έχει μοναδική λύση και να προσδιορίσετε τη λύση αυτή.

43. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $|2x-3|=5$ **β)** $|2x-4|=|x-1|$ **γ)** $|x-2|=2x-1$

δ) $\frac{|x|+4}{3}-\frac{|x|+4}{5}=\frac{2}{3}$ **ε)** $|x-1||x-2|=|x-1|$ **στ)** $\big|2|x|-1\big|=3$

ζ) $\sqrt{x^2-2x+1}=|3x-5|$ **η)** $3|x-1|-|x+2|=x+3$ **θ)** $\big||x-3|+2\big|=\big|2|x-3|-4\big|$

44. Να λύσετε τις εξισώσεις: **α)** $|3x-2|=x+1$ **β)** $3|x-1|-|x+2|=x+3$

β. Η εξίσωση $x^\nu=\alpha$

39. Να λύσετε την εξίσωση $x^\nu=\alpha$.

Αν ν άρτιος και $\alpha\geq 0$ τότε: $x^\nu=\alpha\Leftrightarrow\begin{cases}x=+\sqrt[\nu]{\alpha}\\ x=-\sqrt[\nu]{\alpha}\end{cases}$

Αν ν άρτιος και $\alpha<0$, τότε η εξίσωση $x^\nu=\alpha$ είναι αδύνατη

Αν ν περιττός και $\alpha\geq 0$ τότε: $x^\nu=\alpha\Leftrightarrow x=\sqrt[\nu]{\alpha}$

Αν ν περιττός και $\alpha<0$ τότε: $x^\nu=\alpha\Leftrightarrow x=-\sqrt[\nu]{|\alpha|}$

Βασικές ασκήσεις

45. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^3-125=0$ **β)** $x^5+243=0$ **γ)** $x^2-64=0$ **δ)** $x^5-8x^2=0$

ε) $x^4+x=0$ **στ)** $x^5+16x=0$ **ζ)** $(x+1)^3=64$ **η)** $1+125x^3=0$

46. Να λυθούν οι εξισώσεις:
α) $(x+1)^4-81=0$ **β)** $(x-2)^8+128=0$ **γ)** $(2x-1)^5+243=0$

γ. Εξισώσεις 2ου βαθμού

40. Να λύσετε την εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0,\ \alpha\neq 0$.

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=0 \overset{\alpha\neq 0}{\Leftrightarrow} x^2+\frac{\beta}{\alpha}x+\frac{\gamma}{\alpha}=0 \Leftrightarrow x^2+2\frac{\beta}{2\alpha}x+\frac{\gamma}{\alpha}=0 \Leftrightarrow x^2+2\frac{\beta}{2\alpha}x+\left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2=\left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\frac{\gamma}{\alpha}\Leftrightarrow$$

$$\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2=\frac{\beta^2}{4\alpha^2}-\frac{\overset{4\alpha}{\gamma}}{\alpha}\Leftrightarrow\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2=\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha^2}$$

Έστω $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$, τότε η τελευταία εξίσωση γίνεται: $\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2=\frac{\Delta}{4\alpha^2}$ (1)

Αν $\Delta>0$ τότε η (1) γίνεται: $x+\frac{\beta}{2\alpha}=\pm\sqrt{\frac{\Delta}{4\alpha^2}}\Leftrightarrow x=-\frac{\beta}{2\alpha}\pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$, δηλαδή η εξίσωση έχει δύο λύσεις τις $x_1=\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$ και $x_2=\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$.

Αν $\Delta=0$ η (1) γίνεται:

$$\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2=0\Leftrightarrow\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)=0\Leftrightarrow\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}=0\Leftrightarrow x=-\frac{\beta}{2\alpha}\right)\text{ ή }\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}=0\Leftrightarrow x=-\frac{\beta}{2\alpha}\right)$$

Στη περίπτωση αυτή η εξίσωση έχει διπλή ρίζα την $-\frac{\beta}{2\alpha}$.

Τέλος αν $\Delta<0$ τότε η (1) είναι αδύνατη άρα και η ισοδύναμή της, η αρχική, είναι αδύνατη.

41. Να αποδείξετε τους τύπους του Vieta, δηλαδή ότι αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0,\ \alpha\neq 0$, τότε το άθροισμα των ριζών είναι $S=-\frac{\beta}{\alpha}$, το γινόμενο των ριζών είναι $P=\frac{\gamma}{\alpha}$ και η εξίσωση παίρνει τη μορφή $x^2-Sx+P=0$.

Είναι $x_1+x_2=\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}+\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-2\beta}{2\alpha}=-\frac{\beta}{\alpha}$ και

$x_1\cdot x_2=\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\cdot\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{(-\beta)^2-\left(\sqrt{\Delta}\right)^2}{4\alpha^2}=\frac{\beta^2-\left(\beta^2-4\alpha\gamma\right)}{4\alpha^2}=\frac{\cancel{4}\cancel{\alpha}\gamma}{\cancel{4}\alpha^{\cancel{2}}}=\frac{\gamma}{\alpha}$. Άρα $S=-\frac{\beta}{\alpha}$ και $P=\frac{\gamma}{\alpha}$.

Η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ γίνεται: $x^2+\frac{\beta}{\alpha}x+\frac{\gamma}{\alpha}=0\Leftrightarrow x^2-(x_1+x_2)x+x_1\cdot x_2=0\Leftrightarrow x^2-Sx+P=0$

Βασικές ασκήσεις

47. Να λύσετε τις εξισώσεις:
α) $6x^2+12x=0$ **β)** $2x^2-10=0$ **γ)** $3x^2+12=0$

48. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^2-2\left(\alpha^2+\beta^2\right)x+\left(\alpha^2-\beta^2\right)^2=0$ **β)** $2\left(x-\beta\right)^2=\left(\alpha+x\right)\left(x-\beta\right)-\alpha\beta$

49.Δίνεται το τριώνυμο $-x^2+\left(\sqrt{3}-1\right)x+\sqrt{3}$

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι: $\Delta=\left(\sqrt{3}+1\right)^2$

β) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο .

50.Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $3x^2-4\sqrt{3}x+3=0$ **β)** $x^2-\left(3-\sqrt{2}\right)x-3\sqrt{2}=0$

51.Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2-\lambda x+\lambda-1=0$ έχει πραγματικές ρίζες.

52.Δίνεται η εξίσωση: $x^2+2x-\lambda=0$.Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό λ, ώστε η εξίσωση να έχει:

α) ρίζα το 1 **β)** δύο ρίζες πραγματικές και άνισες

γ) δύο ίσες πραγματικές ρίζες **γ)** καμία πραγματική ρίζα.

53.Να βρείτε το πρόσημο των ριζών των παρακάτω εξισώσεων, χωρίς να τις λύσετε.

α) $x^2-5x+2=0$ **β)** $x^2-3x-5=0$

γ) $x^2+8x+4=0$ **δ)** $x^2+6x+\lambda^2=0,\ \lambda\neq 0$

54.Αν x_1,x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2+2x-5=0$, να βρείτε τις εξισώσεις που έχουν ρίζες τα ζεύγη:

α) $-x_1,-x_2$ **β)** kx_1,kx_2 **γ)** x_1^2,x_2^2

δ) $x_1x_2^2,x_2x_1^2$ **ε)** $\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_1}{x_2}$ **στ)** $2x_1+3,2x_2+3$

55.Αν x_1,x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης: $x^2-\lambda x+\lambda-1=0$, να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ για τις οποίες ισχύει $x_1^2-5x_1^2x_2-5x_1x_2^2+x_2^2=-25$

56.Δίνεται η εξίσωση $x^2+2\lambda x+4\left(\lambda-1\right)=0$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα της εξίσωσης.

β) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

γ) Αν x_1,x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης τότε να βρείτε για ποια τιμή του λ ισχύει $\left(x_1+x_2\right)^2+x_1\cdot x_2+5=0$.

57.Δίνεται το τριώνυμο $2x^2+\lambda x-5$, όπου $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Αν μια ρίζα του τριωνύμου είναι ο αριθμός $x_0=1$, να προσδιορίσετε την τιμή του λ.

β) Για $\lambda=3$, να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο.

58.Έστω $\alpha,\ \beta$ πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν: $\alpha+\beta=-1$ και $\alpha^3\beta+2\alpha^2\beta^2+\alpha\beta^3=-12$

α) Να αποδείξετε ότι: $\alpha\cdot\beta=-12$.

β) Να κατασκευάσετε εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς $\alpha,\ \beta$ και να τους βρείτε.

59.Δίνεται ορθογώνιο με περίμετρο $\Pi=20\text{cm}$ και εμβαδό $E=24\text{cm}^2$.

α) Να κατασκευάσετε μία εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ως ρίζες τα μήκη των πλευρών αυτού του ορθογωνίου.

β) Να βρείτε τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου.

60. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ για την οποία η εξίσωση $x^2+(\lambda+1)x+\lambda^2-3=0$ έχει ρίζες αντίστροφες.

61. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ για την οποία η εξίσωση $x^2+(\lambda^2-9)x+\lambda+2=0$ έχει ρίζες αντίθετες.

62. Δίνεται το τριώνυμο: $\lambda x^2-(\lambda^2+1)x\ +\lambda$, $\lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda\neq 0$.

β) Αν $x_1,\ x_2$ είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S=x_1+x_2$ συναρτήσει του $\lambda\neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P=x_1\cdot x_2$ των ριζών

γ) Αν $\lambda<0$, τότε:

i) το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ii) να αποδείξετε ότι $|x_1+x_2|\geq 2x_1x_2$, όπου x_1,x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου.

63.α) Δίνεται η διτετράγωνη εξίσωση: $x^4-7x^2+12=0$. Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να προσδιορίσετε.

β) Γενικεύοντας το παράδειγμα του προηγούμενου ερωτήματος, θεωρούμε τη διτετράγωνη εξίσωση: $x^4+\beta x^2+\gamma=0$ (1) με παραμέτρους $\beta,\ \gamma\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι:

Αν $\beta<0$, $\gamma>0$ και $\beta^2-4\gamma>0$, τότε η εξίσωση (1) έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

64. Δίνεται η εξίσωση: $\alpha x^2-5x+\alpha=0$, με παράμετρο $\alpha\neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι αν $|\alpha|\leq\frac{5}{2}$, τότε η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικούς αριθμούς, που είναι αντίστροφοι μεταξύ τους.

β) Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης, όταν $\alpha=2$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση: $2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-5\left(x+\frac{1}{x}\right)+2=0$.

4. Ανισώσεις

α. Ανισώσεις 1ου βαθμού

42. Να λύσετε την ανίσωση $\alpha x+\beta>0$.

Είναι: $\alpha x+\beta>0\Leftrightarrow \alpha x>-\beta$

Αν $\alpha>0$, τότε: $\alpha x>-\beta\Leftrightarrow\frac{\cancel{\alpha}x}{\cancel{\alpha}}>-\frac{\beta}{\alpha}\Leftrightarrow x>-\frac{\beta}{\alpha}$, ενώ αν $\alpha<0$, τότε: $\alpha x>-\beta\Leftrightarrow\frac{\cancel{\alpha}x}{\cancel{\alpha}}<-\frac{\beta}{\alpha}\Leftrightarrow x<-\frac{\beta}{\alpha}$.

Αν $\alpha=0$, τότε η ανίσωση γίνεται $0\cdot x>-\beta$ και

αν $\beta\geq 0$ αληθεύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$, ενώ αν $\beta<0$ είναι αδύνατη.

Βασικές ασκήσεις

65. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $\frac{|x-1|-4}{2}+\frac{5}{3}<\frac{|x-1|}{3}$ **β)** $|x-2|>0$ **γ)** $|x-5|\leq 0$ **δ)** $\sqrt{x^2-6x+9}\leq 5$

ε) $||x-2|-3|<1$ **στ)** $||x-1|-2|\geq 3$ **ζ)** $1\leq|x-3|<6$

66.α) Να λύσετε την ανίσωση $|x-5|<2$.

β) Να λύσετε την ανίσωση $|2-3x|>5$.

γ) Να παραστήσετε τις λύσεις των δυο προηγούμενων ανισώσεων στον ίδιο άξονα των πραγματικών αριθμών. Με τη βοήθεια του άξονα, να προσδιορίσετε το σύνολο των κοινών τους λύσεων και να το αναπαραστήσετε με διάστημα ή ένωση διαστημάτων.

67.α) Να λύσετε την εξίσωση: $|2x-4|=3|x-1|$.

β) Να λύσετε την ανίσωση: $|3x-5|>1$.

γ) Είναι οι λύσεις της εξίσωσης του (α) ερωτήματος και λύσεις της ανίσωσης του (β) ερωτήματος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

68.α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει $|x-4|<2$.

β) Θεωρούμε πραγματικό αριθμό x που η απόστασή του από το 4 στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι μικρότερη από 2.

i) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του τριπλάσιου του αριθμού αυτού από το 4 είναι μεγαλύτερη του 2 και μικρότερη του 14.

ii) Να βρείτε μεταξύ ποιων ορίων περιέχεται η τιμή της απόστασης του 3x από το 19.

69.Να λύσετε τις εξισώσεις**: α)** $|2x-6|=2x-6$ **β)** $|3x-1|=1-3x$

70.Έστω Α και Β τα σημεία που παριστάνουν σε έναν άξονα τους αριθμούς -4 και 6 και Μ το μέσο του τμήματος ΑΒ.

α) Ποιος αριθμός αντιστοιχεί στο σημείο Μ;

β) Να διατυπώσετε γεωμετρικά το ζητούμενο της ανίσωσης $|x-6|\le|x+4|$ και να βρείτε τις λύσεις της.

γ) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το συμπέρασμά σας.

71.Έστω Α και Β τα σημεία που παριστάνουν σε έναν άξονα τους αριθμούς -1και 5 και Μ το μέσο του τμήματος ΑΒ.

α) Ποιος αριθμός αντιστοιχεί στο σημείο Μ;

β) Να διατυπώσετε γεωμετρικά το ζητούμενο της εξίσωσης $|x+1|+|x-5|=6$ και να βρείτε τις λύσεις της.

γ) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το συμπέρασμά σας.

β. Ανισώσεις 2ου βαθμού

43.Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma,\ \alpha\neq 0$ για τις διαφορετικές τιμές της διακρίνουσας Δ.

Το τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha\neq 0$ μετασχηματίζεται ως εξής:

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\left(x^2+\frac{\beta}{\alpha}x+\frac{\gamma}{\alpha}\right)=\alpha\left[x^2+2\frac{\beta}{2\alpha}x+\left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2+\frac{\gamma}{\alpha}\right]=$$

$$=\alpha\left[\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}+\frac{\gamma}{\alpha}\right]=\alpha\left[\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha^2}\right]=\alpha\left[\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\frac{\Delta}{4\alpha^2}\right]$$

Αν $\Delta>0$, τότε $\Delta=\left(\sqrt{\Delta}\right)^2$ και το τριώνυμο γίνεται:

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\left[\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\frac{\left(\sqrt{\Delta}\right)^2}{4\alpha^2}\right]=\alpha\left[\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right)^2\right]=$$

$$=\alpha\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right)\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right)=\alpha\left(x-\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right)\left(x-\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right)=$$

$=\alpha\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)$, όπου x_1,x_2 οι ρίζες του τριωνύμου.

Αν $\Delta=0$, τότε: $\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$ και

αν $\Delta<0$, τότε $-\Delta=|\Delta|$ και το τριώνυμο γράφεται $\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\left[\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2+\frac{|\Delta|}{4\alpha^2}\right]$

44.Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $\alpha x^2+\beta x+\gamma,\ \alpha\neq 0$ όταν $\Delta>0$.

Είναι $\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)$ (1).

Έστω $x_1<x_2$

Αν $x<x_1<x_2$ τότε $x-x_1<0$, $x-x_2<0$ και $\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)>0$, οπότε λόγω της (1) το τριώνυμο είναι ομόσημο του α.

Αν $x_1<x<x_2$ τότε $x-x_1>0$, $x-x_2<0$ και $\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)<0$, οπότε λόγω της (1) το τριώνυμο είναι ετερόσημο του α.

Αν $x_1<x_2<x$ τότε $x-x_1>0$, $x-x_2>0$ και $\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)>0$, οπότε λόγω της (1) το τριώνυμο είναι ομόσημο του α.

45.Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $\alpha x^2+\beta x+\gamma,\ \alpha\neq 0$ όταν $\Delta=0$.

Είναι $\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$

Για κάθε $x\neq-\frac{\beta}{2\alpha}$ είναι $\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2>0$, οπότε το τριώνυμο είναι ομόσημο του α, ενώ μηδενίζεται για $x=-\frac{\beta}{2\alpha}$.

46.Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $\alpha x^2+\beta x+\gamma,\ \alpha\neq 0$ όταν $\Delta<0$.

Είναι $\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\left[\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2+\frac{|\Delta|}{4\alpha^2}\right]$.

Επειδή η παράσταση στην αγκύλη είναι θετική, το τριώνυμο είναι ομόσημο του α σε όλο το $\mathbb{R}$.

47. Πότε ένα τριώνυμο είναι ετερόσημο του α, μηδέν και πότε ομόσημο του α;

Το τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma,\ \alpha\neq 0$ είναι:

Ετερόσημο του α, μόνο όταν $\Delta>0$ για τις τιμές του x που βρίσκονται μεταξύ των ριζών του.

Μηδέν, όταν η τιμή του x είναι κάποια από τις ρίζες του τριωνύμου.

Ομόσημο του α σε κάθε άλλη περίπτωση.

Βασικές ασκήσεις

72.α) Να τραπούν σε γινόμενο παραγόντων οι παραστάσεις: $2\alpha^2-5\alpha\beta-3\beta^2$ και $\alpha^2-2\alpha\beta-3\beta^2$.

β) Να απλοποιηθεί η παράσταση $\dfrac{2\alpha^2-5\alpha\beta-3\beta^2}{\alpha^2-2\alpha\beta-3\beta^2}$.

73. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $5x^2\le 20x$ **β)** $x^2+3x\le 4$ **γ)** $x^2+4>4x$ **δ)** $x^2+9\le 6x$

ε) $x^2+3x+5\le 0$ **στ)** $2x^2-3x+20>0$ **ζ)** $-\frac{1}{4}\left(x^2-4x+3\right)>0$

74. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει: $2x-1<x^2-4<12$.

75. Δίνεται το τριώνυμο $2x^2-3x+1$.

α) Να βρείτε τις ρίζες του.

β) Να βρείτε τις τιμές του $x\in\mathbb{R}$ για τις οποίες: $2x^2-3x+1<0$.

γ) Να εξετάσετε αν οι αριθμοί $\frac{1}{\sqrt{2}}$ και $\frac{\sqrt{3}}{2}$ είναι λύσεις της ανίσωσης $2x^2-3x+1<0$.

76.α) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2-10x+21<0$.

β) Δίνεται η παράσταση: $A=|x-3|+|x^2-10x+21|$.

i) Για $3<x<7$, να δείξετε ότι: $A=-x^2+11x-24$.

ii) Να βρείτε τις τιμές του $x\in(3,7)$, για τις οποίες ισχύει $A=6$.

77.α) Να αποδείξετε ότι $x^2+4x+5>0$, για κάθε πραγματικό αριθμό x.

β) Να γράψετε χωρίς απόλυτες τιμές την παράσταση: $B=|x^2+4x+5|-|x^2+4x+4|$.

78. Δίνονται οι ανισώσεις: $2\le|x|\le 3$ και $x^2-4x<0$.

α) Να βρείτε τις λύσεις τους.

β) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x\in[2,3]$.

γ) Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δυο ανισώσεων, να δείξετε ότι και ο αριθμός $\frac{\rho_1+\rho_2}{2}$ είναι κοινή τους λύση.

79. Δίνεται το τριώνυμο $f(x)=-x^2+2x+3$.

α) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $f(x)$ για τις διάφορες τιμές του x.

β) Να προσδιορίσετε, αιτιολογώντας την απάντησή σας, το πρόσημο του γινομένου: $f(2{,}999)\cdot f(-1{,}002)$.

γ) Αν $-3<\alpha<3$, να βρείτε το πρόσημο του αριθμού: $-\alpha^2+2|\alpha|+3$.

80. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $x^2-(\lambda+2)x+2\lambda-1=0$ έχει ρίζες άνισες για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού λ.

81. Δίνεται η εξίσωση: $x^2-\lambda x+(\lambda^2+\lambda-1)=0$ (1), με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό λ, ώστε η εξίσωση (1) να έχει ρίζες πραγματικές.

β) Να λύσετε την ανίσωση: $S^2-P-2\ge 0$, όπου S και P είναι αντίστοιχα το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της (1).

82. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η ανίσωση $x^2 + 3\lambda x + \lambda > 0$ αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

83. Δίνεται το τριώνυμο $(\lambda + 2)x^2 - 2\lambda x + 3\lambda,\ \lambda \neq -2$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να λύσετε την ανίσωση $\Delta < 0$.

β) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η ανίσωση $(\lambda + 2)x^2 - 2\lambda x + 3\lambda < 0,\ \lambda \neq -2$ αληθεύει για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

84. Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = x^2 - x + (\lambda - \lambda^2),\ \lambda \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Για ποια τιμή του λ το τριώνυμο έχει δύο ρίζες ίσες;

γ) Αν $\lambda \neq \frac{1}{2}$ και $x_1,\ x_2$ είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου με $x_1 < x_2$, τότε :

i) να αποδείξετε ότι $x_1 < \frac{x_1 + x_2}{2} < x_2$

ii) να διατάξετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς $f(x_2), f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right), f(x_2 + 1)$

85. Δίνεται το τριώνυμο: $x^2 - 2x - 8$

α) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού x .

β) Αν $k = -\frac{8889}{4444}$, είναι η τιμή της παράστασης: $k^2 - 2k - 8$ μηδέν, θετικός ή αρνητικός αριθμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) Αν ισχύει $-4 < \mu < 4$, τι μπορείτε να πείτε για το πρόσημο της τιμής της παράστασης: $\mu^2 - 2|\mu| - 8$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

5. Πρόοδοι

α. Ακολουθίες

48. Τι ονομάζεται ακολουθία; Τι λέγεται πρώτος όρος, τι δεύτερος και τι ν-οστός ή γενικός της όρος;

Ακολουθία πραγματικών αριθμών είναι μια αντιστοίχιση των φυσικών αριθμών 1,2,3,…,ν,… στους πραγματικούς αριθμούς. Ο αριθμός στον οποίο αντιστοιχεί ο 1 καλείται πρώτος όρος της ακολουθίας και τον συμβολίζουμε συνήθως με α_1, ο αριθμός στον οποίο αντιστοιχεί ο 2 καλείται δεύτερος όρος της ακολουθίας και τον συμβολίζουμε συνήθως με α_2 κ.λ.π. Γενικά ο αριθμός στον οποίο αντιστοιχεί ένας φυσικός αριθμός ν καλείται ν-οστός ή γενικός όρος της ακολουθίας και το συμβολίζουμε συνήθως με α_ν. Δηλαδή, $1 \to \alpha_1,\ 2 \to \alpha_2,\ 3 \to \alpha_3, \ldots,\ \nu \to \alpha_\nu, \ldots$ Την ακολουθία αυτή τη συμβολίζουμε (α_ν).

49. Πως ορίζεται μια ακολουθία αναδρομικά;

Για να ορίζεται μια ακολουθία αναδρομικά απαιτείται να γνωρίζουμε:
- Τον αναδρομικό της τύπο και
- Όσους αρχικούς όρους μας χρειάζονται, ώστε ο αναδρομικός τύπος να αρχίσει να δίνει όρους.

Βασικές ασκήσεις

86. Να ορίσετε αναδρομικά τις ακολουθίες: **α)** $\alpha_\nu = \nu + 5$ **β)** $\alpha_\nu = 2^\nu$

87.Να βρείτε το ν-οστό όρο των ακολουθιών:
α) $\alpha_1 = 1,\quad \alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + 2$ **β)** $\alpha_1 = 3,\quad \alpha_{\nu+1} = 5\alpha_\nu$

β. Αριθμητική πρόοδος

50.Πότε μια ακολουθία λέγεται αριθμητική πρόοδος; Ποιος είναι ο αναδρομικός της τύπος;

Μια ακολουθία λέγεται αριθμητική πρόοδος, αν κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενό του με πρόσθεση του ίδιου πάντοτε αριθμού. Αν ω η διαφορά της αριθμητικής προόδου, τότε ο αναδρομικός της τύπος είναι $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + \omega$.

51.Να αποδείξετε ότι $\nu_{o\varsigma}$ όρος μιας αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω είναι $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\omega$.

Από τον ορισμό της αριθμητικής προόδου έχουμε:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \alpha_1\\
\alpha_2 &= \alpha_1 + \omega\\
\alpha_3 &= \alpha_2 + \omega\\
\alpha_4 &= \alpha_3 + \omega\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\alpha_{\nu-1} &= \alpha_{\nu-2} + \omega\\
\alpha_\nu &= \alpha_{\nu-1} + \omega
\end{aligned}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη της ν αυτές ισότητες και εφαρμόζοντας την ιδιότητα της διαγραφής, έχουμε: $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\omega$.

52. Να αποδείξετε ότι τρεις αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν ισχύει $\beta = \frac{\alpha+\gamma}{2}$. Πως ονομάζεται ο β;

Επειδή οι α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, ισχύει ότι: $\beta - \alpha = \omega$ και $\gamma - \beta = \omega$ άρα $\beta - \alpha = \gamma - \beta \Leftrightarrow 2\beta = \alpha + \gamma \Leftrightarrow \beta = \frac{\alpha+\gamma}{2}$.

Αντίστροφα τώρα. Αν $\beta = \frac{\alpha+\gamma}{2}$ τότε $2\beta = \alpha+\gamma \Leftrightarrow \beta - \alpha = \gamma - \beta$ που σημαίνει ότι οι α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Ο β λέγεται αριθμητικός μέσος των α και γ.

Βασικές ασκήσεις

88.Να βρείτε το ν-οστό όρο των αριθμητικών προόδων: **α)** $7, 10, 13, \ldots$ **β)** $5,\ 2,\ -1, \ldots$

89.Ο 5ος όρος μιας αριθμητικής προόδου είναι -5 και ο 15ος όρος της είναι -2. Να βρείτε τον 50ο όρο της προόδου.

90.Ποιος όρος της αριθμητικής προόδου με $\alpha_1 = 80$ και $\omega = -3$ ισούται με -97;

91.Να υπολογίσετε το άθροισμα $1+5+9+\ldots+197$.

92.Ο ν-οστός όρος μιας ακολουθίας είναι $\alpha_\nu = 12 - 4\nu$. Να αποδείξετε ότι η ακολουθία αυτή είναι αριθμητική πρόοδος και να γράψετε τον πρώτο όρο α_1 και τη διαφορά της ω.

93.Μεταξύ των αριθμών 3 και 80 θέλουμε να βρούμε άλλους 10 αριθμούς που όλοι μαζί να είναι διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου. Να βρεθούν οι αριθμοί αυτοί.

94. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - 2\beta x + \left(\beta^2 - 4\right) = 0$, (1) με παράμετρο $\beta \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις: $x_1 = \beta - 2$ και $x_2 = \beta + 2$

β) Αν $x_1,\ x_2$ είναι οι ρίζες της (1), να εξετάσετε αν οι αριθμοί $x_1,\ \beta,\ x_2$, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.

γ. Γεωμετρική πρόοδος

53. Ποια ακολουθία λέγεται γεωμετρική πρόοδος; Τι είναι ο λόγος της προόδου; Ποιος είναι ο αναδρομικός της τύπος;

Μια ακολουθία λέγεται γεωμετρική πρόοδος, αν κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενο με πολλαπλασιασμό επί τον ίδιο πάντοτε μη μηδενικό αριθμό. Τον αριθμό αυτό τον συμβολίζουμε με λ και τον λέμε λόγο της προόδου. Με βάση τον ορισμό, ο αναδρομικός τύπος της γεωμετρικής προόδου είναι: $\alpha_{\nu+1} = \lambda \cdot \alpha_\nu$.

54. Να αποδείξετε ότι $\nu_{o\varsigma}$ όρος μιας αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και λόγο λ είναι $\alpha_\nu = \alpha_1 \cdot \lambda^{\nu-1}$.

Από τον ορισμό της γεωμετρικής προόδου έχουμε:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \alpha_1 \\
\alpha_2 &= \alpha_1 \cdot \lambda \\
\alpha_3 &= \alpha_2 \cdot \lambda \\
\alpha_4 &= \alpha_3 \cdot \lambda \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\alpha_{\nu-1} &= \alpha_{\nu-2} \cdot \lambda \\
\alpha_\nu &= \alpha_{\nu-1} \cdot \lambda
\end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη της ν αυτές ισότητες και εφαρμόζοντας την ιδιότητα της διαγραφής, έχουμε: $\alpha_\nu = \alpha_1 \cdot \lambda^{\nu-1}$.

55. Να αποδείξετε ότι τρεις αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου αν και μόνο αν ισχύει $\beta^2 = \alpha\gamma$. Ποιός αριθμός ονομάζεται γεωμετρικός μέσος των α, γ;

Έστω λ ο λόγος της γεωμετρικής προόδου, τότε: $\frac{\beta}{\alpha} = \lambda$ και $\frac{\gamma}{\beta} = \lambda$, δηλαδή $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\gamma}{\beta} \Leftrightarrow \beta^2 = \alpha\gamma$.

Ο θετικός αριθμός $\sqrt{\alpha\gamma}$ λέγεται γεωμετρικός μέσος των α, γ.

Βασικές ασκήσεις

95. Να βρείτε το ν-οστό όρο των γεωμετρικών προόδων: **α)** 3, 6, 12,... **β)** 18, 6, 2,...

96. Ο 4ος όρος μιας γεωμετρικής προόδου είναι 125 και ο 10ος όρος της είναι $\frac{125}{64}$. Να βρείτε τον 14ο όρο της προόδου.

97. Ποιος όρος της γεωμετρικής προόδου 3, 6, 12, … ισούται με 768 ;

98.α) Αν οι αριθμοί $4-x,\ x,\ 2$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να προσδιορίσετε τον αριθμό x.

β) Αν οι αριθμοί $4-x,\ x,\ 2$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, να προσδιορίσετε τον αριθμό x.

γ) Να βρεθεί ο αριθμός x ώστε οι αριθμοί $4-x,\ x,\ 2$ να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής και γεωμετρικής προόδου.

99. Ο ν-οστός όρος μιας ακολουθίας είναι $\alpha_\nu = 2^\nu \cdot \frac{1}{3^{\nu+1}}$. Να αποδείξετε ότι η ακολουθία αυτή είναι γεωμετρική πρόοδος και να γράψετε τον πρώτο όρο α_1 και το λόγο λ.

6. Συναρτήσεις

α. Η Έννοια της Συνάρτησης

58. Τι ονομάζεται συνάρτηση από ένα σύνολο Α σε ένα σύνολο Β; Πως ονομάζεται το σύνολο Α;

Συνάρτηση από ένα σύνολο Α σε ένα σύνολο Β λέγεται μια διαδικασία με την οποία κάθε στοιχείο του Α αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο του συνόλου Β. Το σύνολο Α λέγεται πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

59. Στη συνάρτηση $y=f(x)$ ποια είναι η ανεξάρτητη και ποια η εξαρτημένη μεταβλητή; Ποιο σύνολο ονομάζεται σύνολο τιμών της συνάρτησης f; Πως συμβολίζεται;

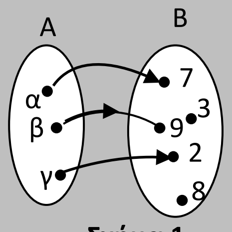
Το γράμμα x που παριστάνει οποιαδήποτε στοιχείο του Α λέγεται ανεξάρτητη μεταβλητή, ενώ το y, που παριστάνει την τιμή της f στο x, λέγεται εξαρτημένη μεταβλητή. Το σύνολο που έχει για στοιχεία του τις τιμές μιας συνάρτησης f για όλα τα $x \in A$, λέγεται σύνολο τιμών της f και συμβολίζεται με $f(A)$.

60. Ποιες συναρτήσεις λέγονται πραγματικές συναρτήσεις μιας πραγματικής μεταβλητής και πως συμβολίζονται;

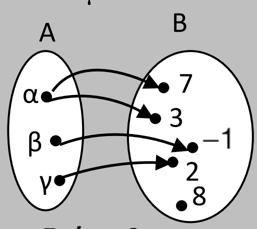
Αν σε μια συνάρτηση $f: A \to B$ είναι $A \subseteq \mathbb{R}$ και $B \subseteq \mathbb{R}$, τότε η συνάρτηση αυτή ονομάζεται πραγματική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής.

Βασικές ασκήσεις

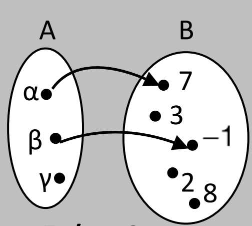
100. Ποιες από τις παρακάτω αντιστοιχίσεις είναι συναρτήσεις και ποιες δεν είναι; Ποιο είναι το πεδίο ορισμού και ποιο το σύνολο τιμών σε κάθε περίπτωση;



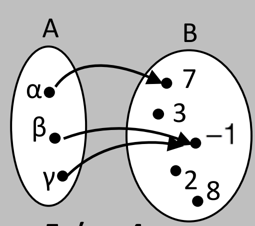
Σχήμα 1



Σχήμα 2



Σχήμα 3



Σχήμα 4

101. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x)=\frac{x^2-16}{x^2-4x}$ **β)** $f(x)=\sqrt{x-1}+\sqrt{2-x}$

γ) $f(x)=\sqrt{-x^2+4x-3}$ **δ)** $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}$ **ε)** $f(x)=\dfrac{\sqrt{|x|-x}}{|x|-2}$

102. Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=\dfrac{2x^2-5x+3}{x^2-1}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της A.

β) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $2x^2-5x+3$.

γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in A$ ισχύει : $f(x)=\dfrac{2x+3}{x-1}$

103. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2+4$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) Να υπολογίσετε τις τιμές $f(-2),\ f(0),\ f(2),\ f(6)$.

γ) Να αποδείξετε ότι $f(\alpha\beta)+4f(\alpha+\beta)-8\alpha\beta=f(\alpha)f(\beta)+4$.

δ) Να λύσετε την εξίσωση $f(\alpha+1)=8$

104. Δίνεται η συνάρτηση f, με: $f(x)=\begin{cases}2x-5, & x\le 3\\ x^2 & ,3<x<10\end{cases}$.

α) Να γράψετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f σε μορφή διαστήματος.

β) Να υπολογίσετε τις τιμές $f(-1),\ f(3)$ και $f(5)$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=25$.

105. Δίνεται η εξίσωση: $x^2-x+(\lambda-\lambda^2)=0$, με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$. (1)

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

β) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες;

γ) Να βρείτε το λ, ώστε η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x^2-x+\lambda-\lambda^2}$ να έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

β. Γραφική παράσταση Συνάρτησης

61. Τι ονομάζεται καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων και πως συμβολίζεται; Ποιο επίπεδο λέγεται καρτεσιανό; Ποιο σύστημα συντεταγμένων λέγεται ορθοκανονικό; Πως ονομάζονται οι άξονες;

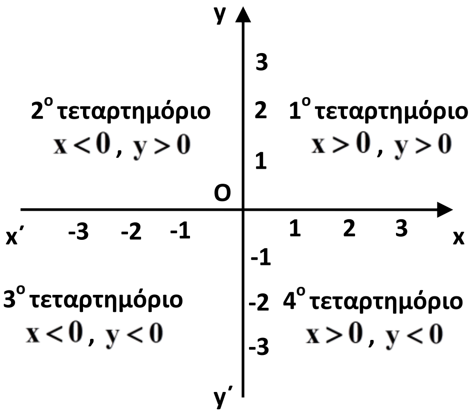
Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων λέγεται ένα ζεύγος κάθετων αξόνων x΄x και y΄y με κοινή αρχή O. Συμβολίζεται με Oxy. Το επίπεδο στο οποίο ορίστηκε το σύστημα αυτό λέγεται καρτεσιανό επίπεδο. Αν επιπλέον οι μονάδες των αξόνων έχουν το ίδιο μήκος το σύστημα Oxy λέγεται ορθοκανονικό. Ο οριζόντιος άξονας x΄x καλείται άξονας των τετμημένων ή άξονας των x και ο κατακόρυφος άξονας y΄y καλείται άξονας των τεταγμένων ή άξονας των y.

62. Ποιοι αριθμοί ονομάζονται συντεταγμένες ενός σημείου Μ;

Σε κάθε σημείο Μ του καρτεσιανού επιπέδου αντιστοιχίζουμε ένα διατεταγμένο ζευγάρι (x,y) πραγματικών αριθμών που ονομάζονται συντεταγμένες του σημείου Μ. Το σημείο συμβολίζεται με $M(x,y)$. Το x λέγεται τετμημένη και το y τεταγμένη του σημείου Μ.

63. Τι είναι τα τεταρτημόρια και τι πρόσημο έχουν οι συντεταγμένες σε αυτά;

Οι άξονες χωρίζουν το επίπεδο σε τέσσερα μέρη καθένα που ονομάζονται **τεταρτημόρια** και διακρίνονται σε 1^o , 2^o , 3^o , 4^o. Το πρόσημο των συντεταγμένων κάθε σημείου φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

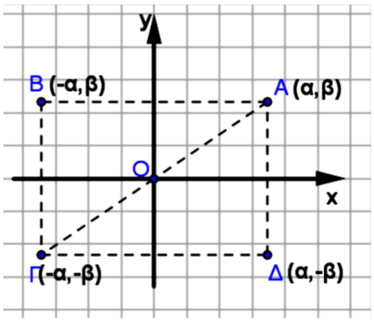


64. Οι συντεταγμένες των σημείων των αξόνων τι μορφής είναι;

Τα σημεία του άξονα x΄x και μόνο αυτά έχουν τεταγμένη μηδέν (y = 0), δηλαδή τα σημεία του άξονα x΄x έχουν συντεταγμένες της μορφής $(x,0)$.
Τα σημεία του άξονα y΄y και μόνο αυτά έχουν τετμημένη μηδέν (x = 0), δηλαδή τα σημεία του άξονα y΄y έχουν συντεταγμένες της μορφής $(0,y)$.

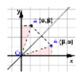
65.Αν $A(\alpha,\beta)$ είναι ένα σημείο του καρτεσιανού επιπέδου, να γράψετε τις συντεταγμένες των συμμετρικών του Α, ως προς τον άξονα x΄x, τον άξονα y΄y, την αρχή Ο των αξόνων κάνοντας κατάλληλο σχήμα.

Το σημείο $B(-\alpha,\beta)$ είναι το συμμετρικό του σημείου Α ως προς τον άξονα y΄y.Δηλαδή δύο σημεία συμμετρικά ως προς τον άξονα y΄y έχουν την ίδια τεταγμένη και αντίθετες τετμημένες.
Το σημείο $\Delta(\alpha,-\beta)$ είναι το συμμετρικό του Α ως προς τον άξονα x΄x.Δηλαδή δύο σημεία συμμετρικά ως προς τον άξονα x΄x έχουν την ίδια τετμημένη και αντίθετες τεταγμένες.
Το σημείο $\Gamma(-\alpha,-\beta)$ είναι το συμμετρικό του Α ως προς την αρχή Ο των αξόνων .Δηλαδή δύο σημεία συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων έχουν αντίθετες συντεταγμένες.



66.Αν $A(\alpha,\beta)$ είναι ένα σημείο του καρτεσιανού επιπέδου, να γράψετε τις συντεταγμένες του συμμετρικού του ως προς τη διχοτόμο της 1ης και 3ης γωνίας των αξόνων κάνοντας κατάλληλο σχήμα.

Το σημείο $A'(\beta,\alpha)$ είναι το συμμετρικό του σημείου $A(\alpha,\beta)$ ως προς την διχοτόμο της $1^{ης}$ και $3^{ης}$ γωνίας των αξόνων.
Δηλαδή δύο σημεία συμμετρικά ως προς την διχοτόμο της $1^{ης}$ και $3^{ης}$ γωνίας των αξόνων «εναλλάσσουν» τις συντεταγμένες τους.



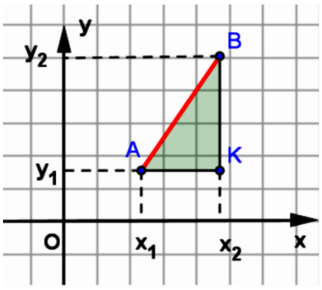
67.Αν $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$ δύο σημεία ενός συστήματος συντεταγμένων Oxy, να αποδείξετε ότι η απόστασή τους δίνεται από τον τύπο: $(AB)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

Εφαρμόζοντας το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΚΑΒ έχουμε: $(AB)^2=(KA)^2+(KB)^2=|x_2-x_1|^2+|y_2-y_1|^2 \Leftrightarrow$

$$(AB)^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2 \Leftrightarrow$$

$$(AB)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

Ο τύπος ισχύει και όταν ΑΒ//x΄x ή ΑΒ // y΄y.



68. Τι ονομάζεται γραφική παράσταση συνάρτησης; Πότε ένα σημείο $A(\alpha,\beta)$ ανήκει στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f;

Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το σύνολο Α. Το σύνολο των σημείων $(x,f(x))$ για όλα τα $x\in A$, ονομάζεται γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

Ένα σημείο $A(\alpha,\beta)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, αν και μόνο αν $f(\alpha)=\beta$.

Βασικές ασκήσεις

106. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-1$. Να βρείτε:

α) Τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες.

β) Τις συντεταγμένες των σημείων της C_f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα x΄x.

107. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^2-5x+4$ και $g(x)=2x-6$. Να βρείτε:

α) Τα κοινά σημεία των C_f και C_g.

β) Τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την C_g.

108. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x-\alpha}{\beta x+2}$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(1,2)$ και $B(2,-1)$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha=\dfrac{1}{2}$ και $\beta=-\dfrac{7}{4}$.

β) Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα x΄x.

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία y = 2.

109. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f. Να βρείτε:

α) Το πεδίο ορισμού της.

β) Το σύνολο τιμών της.

γ) Τις τιμές $f(0), f(-3), f(2)$.

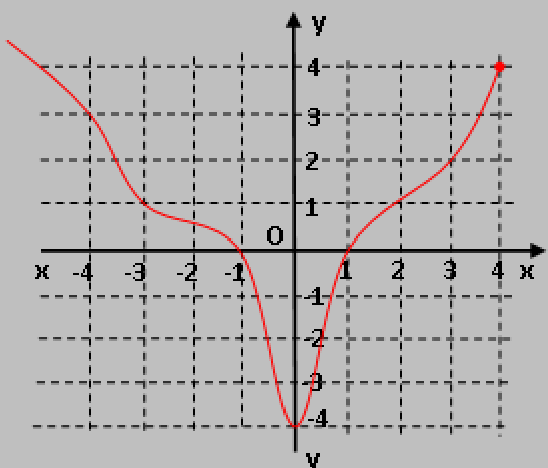
δ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$.

ε) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=-4$.

στ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)<0$.

ζ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)>1$.

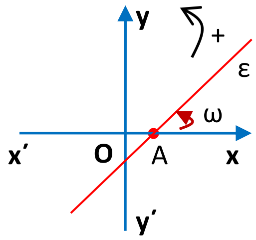
η) Να λύσετε την ανίσωση $1\le f(x)\le 3$.

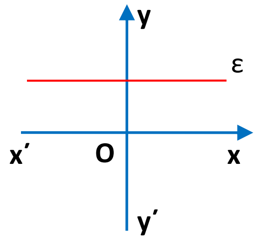


γ. Η συνάρτηση $f(x)=\alpha x+\beta$

69. Ποια είναι η γωνία που σχηματίζει μια ευθεία ε με τον άξονα x΄x και ποιες τιμές παίρνει;

Έστω ότι μια ευθεία ε τέμνει τον άξονα x΄x σε σημείο A.
Η γωνία ω που διαγράφει η ημιευθεία Ax, αν στραφεί κατά την θετική φορά γύρω από το A μέχρι να συμπέσει με την ε, , ορίζεται ως η γωνία που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα x΄x. Ισχύει ότι $0^\circ<\omega<180^\circ$.





Αν η ευθεία ε είναι παράλληλη στον x΄x, τότε η γωνία ω που σχηματίζει η ε με τον άξονα x΄x, είναι ίση με 0°.
Άρα γενικά για την γωνία ω, ισχύει ότι: $0^\circ\le\omega<180^\circ$.

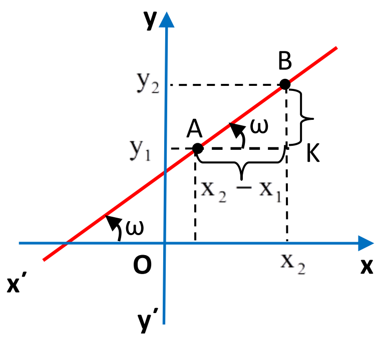
70. Τι ονομάζεται συντελεστής διεύθυνσης ή κλίση μιας ευθείας; Τι γνωρίζετε για τις τιμές του;

Ο συντελεστής διεύθυνσης ή κλίση μιας ευθείας ε είναι η εφαπτομένη της γωνίας ω που σχηματίζει η ε με τον άξονα x΄x και συμβολίζεται με λ_ε ή λ. Αν η γωνία ω είναι οξεία ο συντελεστής διεύθυνσης είναι θετικός, αν η γωνία ω είναι αμβλεία είναι αρνητικός και αν η γωνία είναι 0° τότε είναι 0.

71. Να αποδείξετε ότι αν $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$ είναι δύο σημεία της ευθείας $y=\alpha x+\beta$ τότε συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας δίνεται από τον τύπο $\alpha=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.

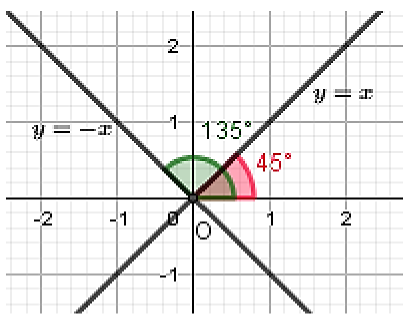
Επειδή τα σημεία A και B ανήκουν στην ευθεία $y=\alpha x+\beta$ ισχύει ότι $y_1=\alpha x_1+\beta$ και $y_2=\alpha x_2+\beta$. Οπότε και

$$y_2-y_1=\alpha x_2+\cancel{\beta}-\alpha x_1-\cancel{\beta}=\alpha(x_2-x_1)\Leftrightarrow\alpha=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\quad y_2-y_1$$



72. Τι γραμμή είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\alpha x$ και από ποιο σημείο διέρχεται; Πως ονομάζονται οι ευθείες $y=x$, $y=-x$ και γιατί;

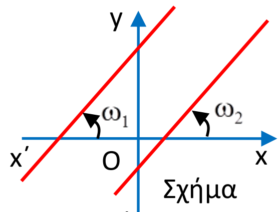
Αν $\beta=0$ η συνάρτηση $f(x)=\alpha x+\beta$ παίρνει τη μορφή $f(x)=\alpha x$, οπότε η γραφική παράσταση της $y=\alpha x$ είναι ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
Αν $\alpha=1$ έχουμε την ευθεία $y=x$ που έχει $\alpha=\varepsilon\varphi\omega=1$ άρα $\omega=45^\circ$. Επομένως η ευθεία $y=x$ είναι η διχοτόμος της 1ης και της 3ης γωνίας των αξόνων.
Αν $\alpha=-1$ έχουμε την ευθεία $y=-x$ που έχει $\alpha=\varepsilon\varphi\omega=-1$ άρα $\omega=135^\circ$.



Επομένως η ευθεία $y=-x$ είναι η διχοτόμος της 2ης και της 4ης γωνίας των αξόνων.

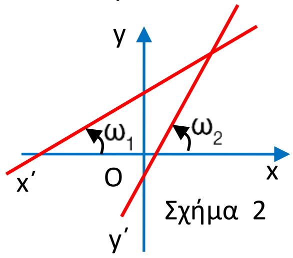
73. Πότε δύο ευθείες ε_1 και ε_2 με εξισώσεις είναι $y_1=\alpha_1 x_1+\beta_1$ και $y_2=\alpha_2 x_2+\beta_2$ είναι παράλληλες και πότε συμπίπτουν και πότε τέμνουν τον άξονα y΄y στο ίδιο σημείο;

→ Αν $\alpha_1=\alpha_2$ τότε $\varepsilon\varphi\omega_1=\varepsilon\varphi\omega_2$, δηλαδή $\omega_1=\omega_2$ και οι ευθείες είναι παράλληλες οι ταυτίζονται.
Αν επιπλέον $\beta_1\neq\beta_2$, τότε οι ευθείες είναι παράλληλες (Σχήμα 1), ενώ αν $\beta_1=\beta_2$ τότε οι ευθείες ταυτίζονται.



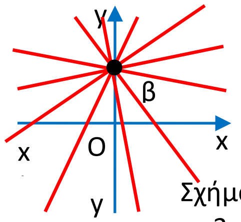
Σχήμα 1

→ Αν $\alpha_1\neq\alpha_2$, τότε $\omega_1\neq\omega_2$ και οι ευθείες τέμνονται (Σχήμα 2).



Σχήμα 2

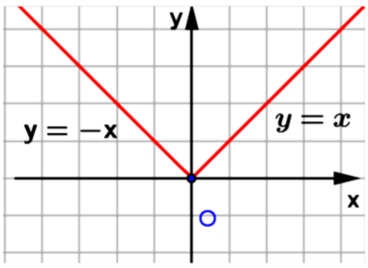
→ Οι ευθείες που έχουν το ίδιο β ,τέμνουν τον άξονα y΄y στο ίδιο σημείο (Σχήμα 3).



Σχήμα 3

74.Να γράψετε τη συνάρτηση $f(x)=|x|$ χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής και να κάνετε τη γραφική της παράσταση.

Σύμφωνα με τον ορισμό της απόλυτης τιμής έχουμε:
$f(x)=\begin{cases}-x, & \alpha\nu\ x<0\\ x, & \alpha\nu\ x\geq 0\end{cases}$. Η γραφική παράσταση της f αποτελείται από δύο ημιευθείες: την $y=-x$ με $x\leq 0$ και την $y=x$ με $x\geq 0$.



Βασικές ασκήσεις

110.παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}-x+1, & x<-1\\ -2, & -1\leq x<1\\ 3x-3, & x\geq 1\end{cases}$.

111.Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $f(x)=|x-3|-2|x+1|+x$

181. Για δεδομένο λ ∈ℝ, θεωρούμε τη συνάρτηση f, με $f(x)=(\lambda+1)x^2-(\lambda+1)x+2,\ x\in\mathbb{R}$.

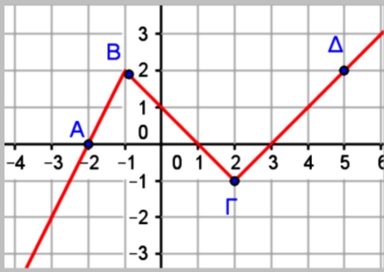
α) Να δείξετε ότι, για οποιαδήποτε τιμή του λ, η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο Α(0,2).

β) Για $\lambda=-1$, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.

γ) Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο Β(2, 0), να βρείτε την τιμή του λ και να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα x΄x και σε άλλο σημείο.

δ) Για $\lambda = 1$, να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται ολόκληρη πάνω από τον άξονα x΄x.

112. Η πολυγωνική γραμμή ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος είναι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f. Να βρείτε την f.



Συνδυαστικά θέματα Επανάληψης

Άλγεβρα Α΄ Λυκείου

Επαναληπτικά θέματα από διαγωνίσματα ΟΕΦΕ 2006 -2018

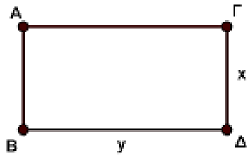
Πραγματικοί αριθμοί

113. Δίνεται ότι $|x-3| \le 2$ και $|y-4| \le 2$.

α) i. Να βρεθούν τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται το x.

ii. Να βρεθούν τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται το y.

β) Να εκτιμήσετε την τιμή της περιμέτρου και του εμβαδού του διπλανού σχήματος, με διαστάσεις τις τιμές των x,y του ερωτήματος α.



Εξισώσεις

114. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - (\lambda+1)x + \lambda = 0$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες για κάθε τιμή του λ.

β) Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης να βρείτε το λ ώστε $(x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2 = 10$

γ) Για λ=3, να κατασκευάσετε εξίσωση *2ου* βαθμού με ρίζες $2x_1$ και $2x_2$.

115. Δίνονται οι παραστάσεις: $A = \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt{\sqrt{2\sqrt[3]{2}}}$ και $B = \dfrac{1}{2+\sqrt{2}} + \dfrac{1}{2-\sqrt{2}}$.

α) Να αποδείξετε ότι Α = 2

β) Να αποδείξετε ότι Β = 2.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $x^3 = \dfrac{1}{A+\sqrt{A}} + \dfrac{1}{A-\sqrt{A}}$.

116. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + (4\lambda-2)x + \lambda(3-8\lambda) = 0$ (1), με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει διακρίνουσα: $\Delta = 4(3\lambda-1)(4\lambda-1)$.

ii. Να βρείτε τις τιμές λ_1, λ_2 της παραμέτρου λ, με $\lambda_1 < \lambda_2$, ώστε η εξίσωση (1) να έχει διπλή ρίζα. Στη συνέχεια, να βρείτε τη διπλή ρίζα x_0, για $\lambda = \lambda_1$.

β) Να προσδιορίσετε τις τιμές των $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση (1) να έχει δύο ρίζες άνισες τις x_1, x_2.
Για ποιές απ’ τις τιμές της παραμέτρου ισχύει: $4x_1x_2 = 3x_1 + 3x_2 - 26$.

117. Δίνεται η εξίσωση $(5x-4)^2+(4x+5)^2+(x-7)(x+7)+8-\left(x-2\sqrt{2}\right)\left(x+2\sqrt{2}\right)=2017$.

α) Να λυθεί η εξίσωση.

β) Να απλοποιηθεί η παράσταση $K=2|14-2x|-3|x-7|+x+2010$ για κάθε $x\in(-7,7)$.

118. Δίνεται η εξίσωση $x^2-2\lambda x+\lambda(\lambda+3)=0\ (1)$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ η εξίσωση (1) έχει δύο πραγματικές και άνισες λύσεις.

β) Έστω S και P το άθροισμα και το γινόμενο αντίστοιχα των ριζών της εξίσωσης (1). Αν ισχύει $P-S=12$, να προσδιορίσετε την τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$.

γ) Για την τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$ που βρήκατε στο β ερώτημα να υπολογίσετε τις παραστάσεις

$A=\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}$ και $B=|x_1-x_2|$.

119. Ένας μαθηματικός ενός φροντιστηρίου έδωσε σε όλους τους μαθητές της Α΄ Λυκείου μια άσκηση ''Κρυπτογραφίας''. Έδωσε τις Δ_1, Δ_2, Δ_3 παρακάτω σχέσεις και είπε στους μαθητές ότι στο τέλος έπρεπε να βρουν μια λέξη. Το κλειδί για την αποκρυπτογράφηση των λέξεων ήταν ότι τα αποτελέσματα των Δ_1, Δ_2, Δ_3 είναι αριθμοί οι οποίοι αντιστοιχούν σε ένα γράμμα της ελληνικής αλφαβήτου κατά αύξοντα φυσικό αριθμό (πχ. το αποτέλεσμα αν είναι 1 αντιστοιχεί στο γράμμα Α, 2 στο Β κτλ.)

- $\Delta_1=\left(\sqrt{27}-\sqrt{12}\right)\left(\sqrt{48}-\sqrt{75}+\sqrt{108}\right)+\sqrt{36}$
- $\Delta_2=\left(\sqrt{3}+1\right)^2-\left(\sqrt{3}-1\right)^2-\sqrt{225}$
- $\Delta_3=\sqrt{10}\cdot\sqrt{4-\sqrt{6}}\cdot\sqrt{4+\sqrt{6}}+\sqrt{25}$

α) Υπολόγισε το Δ_1.

β) Να αποδείξετε ότι $\Delta_2=5$.

γ) Υπολόγισε το $\Delta_3=15$ και βρες την λέξη κλειδί για την εκπαίδευση.

Δ_3	Δ_2	Δ_1	Δ_2

δ) Να λυθεί η εξίσωση $2|4-x|+27=|2x-8|+|x-\Delta_3+11|+\Delta_2$.

120. α) Δίνονται οι αριθμοί $\alpha=\sqrt{\left(4-\sqrt{2}\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}$ και $\beta=\sqrt{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

Να αποδείξετε ότι $\alpha=3$ και $\beta=2$.

β) Αν $\alpha=3$ και $\beta=2$ να λύσετε την εξίσωση $x^2-\alpha|x|+\beta=0,\ x\in\mathbb{R}$.

121. Δίνεται η σχέση $2017|x_1-1|=-2018|x_2+1|$ με $x_1,x_2\in\mathbb{R}$.

α) Να βρεθούν οι τιμές των $x_1,x_2\in\mathbb{R}$.

β) Αν $x_1=1,\ x_2=-1$ να λυθούν οι εξισώσεις

i. $|\alpha-2|=x_1$ **ii.** $|\beta+1|=-x_2$

γ) Αν $\alpha\neq 3$ και $\beta<0$ με α,β λύσεις του β ερωτήματος, να λυθούν οι εξισώσεις:

i. $x^4=\alpha$ **ii.** $x^3=\beta$

122. Δίνονται οι παραστάσεις $A=\frac{\sqrt{(x-1)^2}}{x-1}-\frac{\sqrt{(x-2)^2}}{x-2}$ με $1<x<2$, $B=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4+\sqrt{2}}}-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4-\sqrt{2}}}$.

α) Να αποδειχθεί ότι η παράσταση Α είναι ανεξάρτητη του x.

β) Να υπολογισθεί η τιμή της παράστασης Β.

γ) Αν $A = 2$ και $B = -2$ τότε:

i. Να λυθεί η εξίσωση $|x - B| = Ax$.

ii. Να βρεθεί η τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση $(\lambda - A)(\lambda - B)x = \lambda^2 + 2\lambda$ να είναι αόριστη.

Ανισώσεις

123. Δίνεται η εξίσωση $(\lambda + 2)x^2 - 2\lambda x - 1 = 0$ με $\lambda \neq -2$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ (1)

α) Να αποδείξετε ότι έχει ρίζες άνισες για κάθε $\lambda \neq -2$.

β) Έστω x_1, x_2 οι ρίζες της (1). Να βρείτε:

i) Τα $x_1 + x_2$ και $x_1 x_2$.

ii) Τις τιμές του λ για τις οποίες η (1) έχει ρίζες ετερόσημες.

124. α) Να λυθεί η ανίσωση $3|x - 1| - 2 \leq 2|1 - x|$

β) Να λυθεί η εξίσωση $(x - 1)^4 - 3(x - 1)^2 - 4 = 0$

γ) να αποδείξετε ότι: $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} - \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = 5$.

125. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 + (1 - \lambda)x + 1 = 0$, με $\lambda \in \mathbb{R}$ η οποία έχει δύο ρίζες άνισες τις x_1 και x_2.

α) Να δείξετε ότι $|1 - \lambda| > 2$.

β) Να υπολογίσετε τις τιμές του λ.

γ) Να εκφράσετε σαν συνάρτηση του λ τις τιμές των πιο κάτω παραστάσεων

$K = x_1 + x_2$, $\Lambda = x_1 x_2$, $M = \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}$

δ) Να βρείτε το λ ώστε να ισχύει: $\lambda x_1 x_2^2 + \lambda x_1^2 x_2 + 3x_1 + 3x_2 = 5$

126. α) Να λύσετε την ανίσωση: $\dfrac{|2x - 1|}{3} - 1 < \dfrac{3 - |1 - 2x|}{4}$ και να γράψετε τις λύσεις της σε μορφή διαστήματος Δ.

β) Αν $x \in \Delta$, να δείξετε ότι η παράσταση $A = \dfrac{\sqrt{x^2 + 2x + 1}}{x + 1} + \dfrac{\sqrt{x^2 - 4x + 4}}{x - 2}$ είναι σταθερός αριθμός.

127. α) Να λύσετε τις εξισώσεις:

i. $x^2 - x - 6 = 0$ **ii.** $(x - 1)^2 - |x - 1| - 6 = 0$

β) i. Να λύσετε την ανίσωση $-x^2 + x + 6 < 0$.

ii. Για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού λ η εξίσωση $x^2 + 2x + \dfrac{\lambda^2}{4} = 0$ είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$;

128. Δίνεται η εξίσωση $\lambda x^2 - (\lambda - 2)x + 2 - \lambda = 0,\ \lambda \in \mathbb{R}^*$ (1).

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta = 5\lambda^2 - 12\lambda + 4$.

β) i. Για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες;

ii. Αν x_1, x_2 οι ρίζες της (1), να βρεθεί η τιμή του λ ώστε να ισχύει: $x_1 x_2 - 3(x_1 + x_2) = 0$.

γ) Αν $y_1 = 5$ και $y_2 = 1$ οι λύσεις της εξίσωσης $x^2 - \big||\kappa| + 2\big|x + d(\mu, 4) = 0$, να βρεθούν τα $\kappa, \mu \in \mathbb{R}$.

Πρόοδοι

129. Σε αριθμητική πρόοδο είναι $(\alpha_1 - 1)^3 = 8$ και $\alpha_6 = 13$.

α) Να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 *(μονάδες* 5) και την διαφορά ω της προόδου.

Αν $\alpha_1 = 3$ και ω = 2, τότε:

β) Να βρείτε το ελάχιστο πλήθος πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου, που απαιτούνται, ώστε το άθροισμα τους να ξεπερνάει το 440.

γ) Αν οι μη μηδενικοί αριθμοί $\alpha_2 - x^2$, $\alpha_3 - x^2$, $\alpha_5 - 2x^2$ με την σειρά αυτή, είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, με λόγο $\lambda \neq 1$, να βρείτε τις ακέραιες τιμές του x και τον λόγο της προόδου.

Βασικές έννοιες συναρτήσεων

130. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β) Να απλοποιήσετε τον τύπο της.

γ) Να αποδείξετε ότι: $\dfrac{2005^2 - 1}{2005^2 - 3 \cdot 2005 + 2} = \dfrac{2006}{2003}$.

131. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \dfrac{x^3 - 4x}{x^2 + 2x}$

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης και να απλοποιηθεί ο τύπος της.

β) Να υπολογιστεί η παράσταση $A = \dfrac{f(3) - f(1)}{\sqrt{f(4)} - 2}$.

γ) Να λυθεί η εξίσωση $|f(4)x - 1| = |2 - f(3)x|$

132. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^4 - \alpha x^2 + 2,\ x \in \mathbb{R}$, όπου $\alpha = \dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} + \dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$

α) Να αποδείξετε ότι α = 6.

β) Να υπολογίσετε την τιμή $f(1)$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση: $f(x) = f(1)$.

δ) Να λύσετε την ανίσωση: $f(x) - f(1) \leq 0$.

133. α) Να λύσετε την εξίσωση: $x^2 - 4x + 3 = 0$.

β) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 - 6x + 8 < 0$.

γ) Να λύσετε την ανίσωση: $(x^{10} + 1)(x^2 - 6x + 8)(x^2 - 4x + 3) > 0$.

134. Η εξίσωση $x^2 - \lambda x + 3\lambda = 0$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$, έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες x_1, x_2.

α) Να αποδείξετε ότι λ < 0 ή λ > 12.

β) Για $\lambda = -4$:

i) Να αποδείξετε ότι οι ρίζες x_1, x_2 της εξίσωσης είναι ετερόσημες.

ii) Αν x_2 είναι η αρνητική ρίζα της εξίσωσης, να λύσετε την ανίσωση $|x + 2011| \leq x_2$.

iii) Αν x_1 είναι η θετική ρίζα της εξίσωσης, να δείξετε ότι $\sqrt[3]{x_1\sqrt{x_1}} = \sqrt{2}$.

135. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{\sqrt{(x+1)^4}}{x+1} - \dfrac{\sqrt{(x-2)^4}}{x-2}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.
β) Να δείξετε ότι για κάθε x στο πεδίο ορισμού της ισχύει ότι $f(x) = 3$.
γ) Να λύσετε στο $\mathbb{R}$ την ανίσωση: $|18-3x| \le f(2012)$.

136. Δίνεται η ακολουθία πραγματικών αριθμών (α_ν), $\nu \in \mathbb{N}^*$, η οποία είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά $\omega = -2$ και της οποίας ο έβδομος όρος είναι: $\alpha_7 = -11$ και η συνάρτηση $f(x) = \alpha_1 x^2 + \alpha_4 x + \alpha_1$, όπου α_1 και α_4, ο πρώτος και ο τέταρτος όρος της παραπάνω αριθμητικής προόδου.
α) Να βρείτε τους α_1 και α_4.
β) Αν $\alpha_1 = 1$ και $\alpha_4 = -5$ και x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$, να υπολογίσετε τις τιμές των παρακάτω παραστάσεων:
i) $A = x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1$
ii) $B = \dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_1}$
iii) $\Gamma = \sqrt[3]{\sqrt{400(x_1 + x_2) - 2012 x_1 x_2 + 12}}$
γ) Να λύσετε την εξίσωση: $|x^2 - B - 2| + |x - A| = \Gamma$, όπου Α,Β,Γ είναι οι τιμές των παραστάσεων που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα β.

137. Δίνεται το τριώνυμο $4x^2 - 4\lambda x + 5\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$
α) Να βρείτε τη διακρίνουσα του τριωνύμου και το πρόσημό της για τις διάφορες τιμές του λ.
β) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες:
i. Το τριώνυμο έχει δύο ρίζες άνισες.
ii. Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{4x^2 - 4\lambda x + 5\lambda}$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.
γ) Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του λ, για την οποία το τριώνυμο έχει δύο ρίζες x_1, x_2 με
$$x_1 + x_2 = x_1 x_2 - 1.$$

138. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - \Delta x + \Delta = 0$ (1) όπου Δ είναι η διακρίνουσα της.
α) Να βρείτε τις τιμές του Δ και το πλήθος των ριζών της (1).
Για Δ = 5, θεωρούμε τις συναρτήσεις
$g(x) = \sqrt{x^2 - 2(x_1 x_2)x + 5(x_1 + x_2)}$, $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{x - 1}$ όπου x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1).
β) i. Να αποδείξετε ότι $g(x) = |x - 5|$
ii. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και να απλοποιήσετε τον τύπο της.
iii. Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και C_g.

139. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{3 - |1 - x|} + |\kappa^3 + 1|$, $\kappa \in \mathbb{R}$.
α) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $A = [-2, 4]$.
β) Να βρείτε την τιμή του κ για την οποία το σημείο $M(-1, 1)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f.

140. α) Έστω σημείο $M(x^2 + x - 6, x^2 + 3x + 2)$, $x \in \mathbb{R}$. Να βρεθούν τα $x \in \mathbb{R}$ ώστε το Μ να βρίσκεται στο 2ο τεταρτημόριο.
β) Αν A_1 το σύνολο λύσεων της ανίσωσης $x^2 + x - 6 < 0$ τότε:
i. αν $x \in A_1$, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της παράστασης $3 - x$.
ii. αν $x \in A_1$ να λύσετε την ανίσωση $-1 < \sqrt{x^2 - 6x + 9} \le 2$.

γ) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x+\alpha}{\sqrt{9-x^2}}$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

ii. Να βρείτε το α, αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το $A\left(2,\dfrac{4\sqrt{5}}{5}\right)$.

Η συνάρτηση $f(x)=\alpha x+\beta$

141. Δίνονται οι ευθείες (ε_1): $y=|\alpha+2|x+4$, (ε_2): $y=|2\alpha-1|x+15$

α) Αν οι (ε_1) και (ε_2) είναι παράλληλες να βρείτε το α.

β) Για α = 3 να βρείτε :

i) τις συντεταγμένες του σημείου Α που η (ε_1) τέμνει τον άξονα y'y καθώς και του σημείου Β που η (ε_2) τέμνει τον άξονα x'x.

ii) την απόσταση ΑΒ.

142. Δίνονται οι ευθείες (ε_1): $y=(2|\alpha|-1)x+3$ και (ε_2): $y=-\dfrac{1}{3}x-\dfrac{1}{3}$

α) Να βρεθούν οι τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$ για τις οποίες οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) είναι κάθετες.

β) Για α=2

1. Να βρεθεί το σημείο τομής Α των ευθειών (ε_1) και (ε_2).

2. Να βρεθεί η απόσταση του σημείου Α από την αρχή των αξόνων.

γ) Για ποια τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$ το σημείο Α ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο: $f(x)=x^2+\lambda x-1,\ x\in\mathbb{R}$.

δ) Για $\lambda=0$ να βρεθούν τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x.

143. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}2\alpha x-5, & -5\le x<2\\ x+\beta\ , & 2\le x<5\end{cases}$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν: $f(-2)=f(4)$ και $f(2)=f(-1)$.

α) Να δείξετε ότι α= -1 και β= - 5.

β) Να βρείτε το $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε οι ευθείες $(\varepsilon_1): y=(\lambda^4+2)x+f(1)$ και $(\varepsilon_2): y=(13\lambda^2-34)x+f(-3)$ να είναι παράλληλες.

γ) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση: $f(x)=1$.

144. Δίνονται οι ευθείες ε_1 και ε_2 με εξισώσεις $\varepsilon_1: y=(\lambda-2)x+1$, $\varepsilon_2: y=\dfrac{2-\lambda}{4}x-1$

α) Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού λ ώστε οι ευθείες ε1 και ε2 να είναι παράλληλες.

β) Να βρείτε τις τιμές των πραγματικών αριθμών λ ώστε οι ευθείες ε_1 και ε_2 να είναι κάθετες μεταξύ τους.

145. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\left(|\lambda|-\dfrac{1}{2}\right)x+3$ όπου λ, x πραγματικοί αριθμοί, της οποίας η γραφική παράσταση είναι η ευθεία με εξίσωση $y=\left(|\lambda|-\dfrac{1}{2}\right)x+3$.

α) Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού λ έτσι ώστε η ευθεία με εξίσωση $y=\left(|\lambda|-\dfrac{1}{2}\right)x+3$ σχηματίζει με
τον άξονα x΄x γωνία 45^o.

β) Για $\lambda = 2$:

i) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες x΄x, y'y κα να τη σχεδιάσετε.

ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

iii) Να αποδείξετε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό ισχύει $f\left(\alpha^2\right) > f(-1)$.

146. Α. Δίνεται η εξίσωση $x+1=\lambda^2-|\lambda|x$ όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι για κάθε τιμή της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$ η παραπάνω εξίσωση έχει μοναδική λύση ως προς x την οποία και να προσδιορίσετε.

β) Αν η λύση της παραπάνω εξίσωσης για κάθε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ είναι: $x=|\lambda|-1$, να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου λ για τις οποίες η λύση αυτή, απέχει από τον αριθμό 3 απόσταση που δεν ξεπερνά το 2.

Β. Δίνονται οι ευθείες ε_1: $y=\left(\mu^2-4\right)x+\mu+1,\ \mu \in \mathbb{R}$ και ε_2: $y=\left(-\mu^2+4\mu-3\right)x+2,\ \mu \in \mathbb{R}$

Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου $\mu \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ σχηματίζουν με τον άξονα x΄x, αντίστοιχα αμβλεία και οξεία γωνία.

147. Δίνεται η ευθεία ε με εξίσωση: $y=\left(|\alpha-3|-1\right)x+\left(\alpha^2+2|\alpha|-3\right),\ \alpha \in \mathbb{R}$. Για ποιες τιμές του α η ευθεία ε:

α) Είναι παράλληλη στην ευθεία y = x ;

β) Σχηματίζει οξεία γωνία με τον άξονα x΄x;

γ) Διέρχεται από την αρχή 0(0. 0) των αξόνων:

148. Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^2-kx-3,\ k \in \mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο Α(1, -4).

α) Να αποδείξετε ότι k = -2 και να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες x΄x και yy΄y.

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από το σημείο $B(-1, f(-1))$ και είναι παράλληλη στην ευθεία ζ με εξίσωση: y = 3x + 2015 .

γ) Έστω Κ(1,α), Λ(3,β), Μ(5, γ) τρία σημεία που ανήκουν στην ευθεία ε. Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α, β, γ με τη σειρά που δίνονται αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου.

149. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-4x+2,\ x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=0$ έχει δύο ρίζες άνισες.

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$, να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

$$A=\frac{\sqrt{f(0)}}{\sqrt{f(-1)-f(0)}-\sqrt{f(0)}}+\frac{\sqrt{f(-1)-f(0)}}{\sqrt{f(-1)-f(0)}+\sqrt{f(0)}}$$

$$B=x_1^3x_2+x_1x_2^3$$

$$\Gamma=\sqrt{x_1^2}\cdot|x_2|$$

γ) Αν $A=\frac{7}{3},\ B=24$ και $\Gamma=2$

i. Να σχεδιάσετε την ευθεία $y=\Gamma x+\frac{B-10}{A}$ σε ένα σύστημα συντεταγμένων Oxy.

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η ευθεία ε με τους άξονες x΄x, y΄y.